Universitatea din Baia Mare
Lucrările Seminarului de creativitate matematică,
Vol.1(1991-1992), pag. 1-12

DUALITATEA ÎN STUDIUL RECURENŢELOR OMOGRAFICE

Vasile BERINDE

Şirurile, în general, şi în particular, şirurile recurente, reprezintă terenul predilect al întîielor încercări creatoare ale elevilor de liceu. Aceasta explică numărul destul de mare de probleme, legate de acest subiect, incluse în revistele de specialitate. Un loc aparte în clasa acestor probleme îl ocupă recurenţele omografice, datorită numeroaselor proprietăţi geometrice ale funcţiei omografice şi multitudinea de sugestii pe care le pot oferi acestea cercetătorului care nu posedă suficiente cunoştinţe de matematici superioare şi îl stimulează astfel în efortul de a le dobîndi. Un bun îndrumar în această direcţie este lucrarea [1], prin capitolul 1, pag.1-68, care tratează - după prezentarea unor aspecte teoretice consistente, peste programa de liceu - 9 aplicaţii care acoperă o arie întinsă din această tematică.

O altă metodă de abordare a recurenţelor omografice este dată în [3], pag.53.

În lucrarea de faţă, încercăm să aducem încă un argument la aserţiunea că matematica, prin frumuseţile nebănuite pe care le ascunde, este o sursă inepuizabilă de surprize, chiar şi atunci cînd este vorba de cele mai binecunoscute rezultate. Sperăm ca prin aceasta şi prin problemele deschise de la sfîrşitul lucrării să stimulăm creativitatea tinerilor cercetători: elevi sau studenţi.

Menţionăm că în expunerea metodei noastre de abordare a recurenţelor omografice nu vom face nici o referire la proprietățile generale ale funcției omografice de care este legată, pentru a nu afecta cursivitatea și lizibilitatea lucrării de către eventualii cititori, elevi de liceu.

Pe lîngă noutatea și simplitatea metodei utilizate, lucrarea mai are meritul de a semnala și rezolva complet un aspect inedit - după știința noastră - legat de recurențele omografice.

Punctul de plecare îl constituie o problemă dată la Concursul de matematică, faza județeană, în anul 1984, de care ne-am ocupat și în altă parte [2], [3]:

P1. Să se demonstreze că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$, definit prin relația

$$x_{n+1}=\frac{2x_n+3}{x_n},\quad x_0>0, \qquad (1)$$

este convergent.

O relație de recurență de tipul (1) între doi termeni consecutivi ai unui șir se numește omografică. Forma cea mai generală a acestor relații este

$$x_{n+1}=\frac{ax_n+b}{cx_n+d}, \qquad (2)$$

unde $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ sînt constante astfel încît $ad-bc\neq 0$, terminologia fiind adoptată de la funcția omografică,

$$\omega:\mathbb{R}\setminus\{-\frac{d}{c}\}\to\mathbb{R}\setminus\{-\frac{a}{c}\},$$ $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{d}{c}\}\to\mathbb{R}\setminus\{-\frac{a}{c}\}$

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d},$$

care este o noțiune fundamentală în geometrie prin transformarea omografică asociată.

Revenind la problema P1, facem precizarea că ea poate fi abordată simplu prin metoda expusă în [2] și [3]. Odată rezolvată problema, prin oricare dintre metode, se recomandă o reabordare creatoare a ei, pornind de la observația că în [3], asupra lui x_0 se impun condiții mai slabe decît în P1, și anume

$$x_0\in(-\infty,-\frac{3}{2})\cup(-\frac{6}{7},0)\cup(0,+\infty) \qquad (3)$$

De ce oare aceste restricții asupra lui x_0 sînt prezente în enunţul problemei? De ce nu putem avea de exemplu

$$x_0=-\frac{3}{2} \quad sau \quad x_0=-\frac{6}{7} \ ?$$

Răspunsul este imediat. Pornind, bunăoară cu

$$x_0=-\frac{21}{20},$$

obţinem, după trei paşi, $x_3=0$, aşadar x_4 nu mai poate fi calculat, căci fracţia din (1) ar avea numitorul zero.

Aşadar restrîngerea valorilor pentru termenul iniţial al şirului are ca scop tocmai asigurarea bunei definiri a recurenţei omografice, căci, dacă $x_0>0$, atunci, prin inducţie se arată că $x_n>0$, pentru orice n, deci recurenţa (1) este bine definită, iar în cazul condiţiei (3), se verifică imediat că, pentru $n\geq 2$, avem $x_n>0$.

Dar apare întrebarea: întregul interval

$$(-\frac{3}{2}, -\frac{6}{7})$$

constituie mulţimea valorilor neadmise pentru x_0 ?
Dacă nu, cum poate fi descrisă mulţimea acestora?
De răspunsurile la aceste două întrebări, pentru cazul general, se ocupă lucrarea de faţă. În final vom evidenţia aspecte interesante legate de acest subiect.

Pentru simplificarea expunerii facem observaţia că orice recurenţă de forma (2) poate fi redusă la o recurenţă de forma

$$y_{n+1}y_n+\alpha y_n+\beta=0 \ , \qquad (4)$$

prin efectuarea substituţiei

$$y_n=cx_n+d$$

Din acest motiv, în continuare ne vom ocupa numai de forma redusă (4) a recurenţelor omografice.

Definiţia 1.

Ecuaţia de gradul II

$$r^2+\alpha r+\beta=0, \qquad (5)$$

se numeşte ecuaţie caracteristică a recurenţei (4).

Vom trata separat cazul în care ecuaţia caracteristică are rădăcini reale de cel în care rădăcinile sînt complexe (conjugate, căci $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$).

1. Ecuaţia caracteristică are rădăcini reale.

În acest caz $\alpha^2-4\beta\geq0$ şi ecuaţia (5) are rădăcini reale, fie acestea notate cu a şi b. Aşadar

$$\alpha=-a-b$$
$$\beta=ab\ ,$$

astfel că vom considera şirul $(u_n)_{n\geq0}$, definit de recurenţa

$$u_{n+1}u_n-(a+b)\,u_n+ab=0\ ,\quad n\geq0\ ,\qquad (6)$$

căruia îi ataşăm un alt şir, $(v_n)_{n\geq0}$, definit de relaţia

$$v_{n+1}v_n-(a+b)\,v_{n+1}+ab=0\ ,\quad n\geq0\ ,\qquad (7)$$

numit dualul şirului $(u_n)_{n\geq0}$.

Este clar că dualul lui $(v_n)_{n\geq0}$ este tocmai $(u_n)_{n\geq0}$ deci terminologia este justificată din punct de vedere semantic.

Pentru problema P1, relaţia (6) este ($u_n=x_n$)

$$u_{n+1}u_n-2u_n-3=0\qquad (*)$$

Dificultăţile semnalate în legătură cu recurenţa (1) are în această transcriere următoarea semnificaţie: dacă luăm startul cu

$$u_0=-\frac{21}{20}\ ,$$

obţinem după trei explicitări $u_3=0$, care înlocuit în (*) ne conduce la $-3=0$, imposibil.

Pentru a uşura studiul recurenţelor de forma (6) şi (7) mai facem presupunerea că ele sînt netriviale, adică

$$a,b\in\mathbb{R}^*\qquad (8)$$

Fie

$$c=\frac{b}{a}$$

Avem

Teorema 1.

Şirul $(u_n)_{n\geq0}$ *dat de (6)+(8) satisface una din următoarele* *relații de recurență, și anume*

$$u_{n+p}=\frac{a(u_p-b)+b(a-u_p)c^n}{u_p-b+(a-u_p)c^n}\ ,\qquad (9)$$

pentru orice $n,p\in\mathbf{N}$, dacă $a\neq b$, respectiv

$$u_{n+p}=\frac{b(n+1)u_p-nb^2}{nu_p-(n-1)b}\ ,\qquad (9')$$

pentru orice $n,p\in\mathbf{N}$, dacă $a=b$.

Demonstrație.

Avem nevoie de următoarea

Lemă.

Dacă șirul (y_n) satisface o relație de recurență de forma

$$y_{n+1}=cy_n+d\ ,\quad n\geq 0$$

atunci

$$y_{n+p}=c^n y_p+d\sum_{k=p}^{n+p-1}c^{n+p-k}\ ,\quad n,p\in\mathbf{N}$$

Demonstrația lemei.

Relația de recurență poate fi scrisă sub forma

$$\frac{y_{n+1}}{c^{n+1}}=\frac{y_n}{c^n}+\frac{d}{c^{n+1}}\ ,$$

ușor reductibilă la însumare; scriind această relație pentru n luînd valorile p, p+1,...,n+p-1, și însumînd relațiile obținute membru cu membru obținem, după efectuarea calculelor și a reducerilor, tocmai relația cerută.

Trecem acum la demonstrarea teoremei.

Dacă există un număr natural m astfel încît

$$u_m=b\ ,$$

iar șirul (u_n) satisface (6)+(8), atunci

$$u_n=b\ ,\ \textit{pentru orice}\ n\in\mathbf{N}\qquad (10)$$

Într-adevăr, din (6) obținem în acest caz

$$u_{m-1}=\frac{ab}{a+b-u_m}=\frac{ab}{a}=b\ ,\quad s.a.m.d\ ,\quad u_0=b\ ,$$

deci (10) este adevărată pentru $n<m$, iar pentru $n>m$, procedăm prin inducție matematică.

În aceastǎ situație este ușor de verificat că (9), respectiv (9') sînt adevărate.

Presupunem în continuare $u_n\neq b$, pentru orice $n\in\mathbf{N}$. Atunci putem face substituția

$$y_n=\frac{1}{u_n-b}\ ,\quad n\geq 0\ , \qquad (11)$$

care ne dă, folosind (6) și ținînd seama de faptul că avem, datorită condiției (8),

$$u_n\neq a+b\ ,\ \textit{pentru orice}\ n\geq 1\ ,$$

$$y_n=\frac{1}{u_n-b}=\frac{1}{\dfrac{ab}{a+b-u_{n+1}}-b}=-\frac{1}{b}\cdot\frac{u_{n+1}-b-a}{u_{n+1}-b}\ ,$$

adică

$$y_{n+1}=\frac{b}{a}y_n+\frac{1}{a}\ ,\quad n\geq 0$$

Folosind lema, obținem că

$$y_{n+p}=c^n y_p+\frac{1}{b}c^{n+p}\sum_{k=p}^{n+p-1}\frac{1}{c^k}\ ,\quad n,p\in\mathbf{N}^* \qquad (12)$$

Dacă $c\neq 1$, adică $a\neq b$, atunci calculînd suma din (12) obținem

$$y_{n+p}=c^n y_p+\frac{1-c^n}{a-b}\ ,\quad n,p\in\mathbf{N}^*\ ,$$

adică ținînd seama de (11),

$$\frac{1}{u_{n+p}-b}=\frac{u_p-b+(a-u_p)c^n}{(a-b)(u_p-b)}\ ,\quad n,p\in\mathbf{N}^* \qquad (12')$$

Numitorii fracțiilor din (12') sînt, în condițiile în care lucrăm noi, întotdeauna nenuli. Deoarece numărătorul membrului stîng este nenul, la fel trebuie să fie și numărătorul membrului drept, și cum transformările prin intermediul cărora am obținut relaţia (12') nu introduc nici o nedeterminare, din (12') rezultă uşor (9).

Dacă a=b, atunci relaţia (12) ne dă

$$y_{n+p}=y_p+\frac{n}{b}\ ,\quad n,p\in\mathbf{N}\ ,$$

adică, ţinînd seama de substituţia făcută,

$$\frac{1}{u_{n+p}-b}=\frac{nu_p-(n-1)b}{b(u_p-b)}\ ,\quad n,p\in\mathbf{N}, \qquad (12'')$$

Argumentînd la fel ca în celălalt caz rezultă că, dacă $(u_n)_{n\geq 0}$ satisface relaţiile (6)+(8), atunci operaţiile prin care obţinem pe (9') din (12") au toate sens, şi cu aceasta demonstraţia este completă.

Observaţii.

1). Se putea folosi, tot atît de bine, substituţia

$$y_n=\frac{1}{u_n-a}\ ,$$

pe baza unor argumente analoage. De altfel se poate uşor verifica că relaţia (9) este simetrică în raport cu a şi b, datorită simetriei în raport cu a şi b a relaţiei de recurenţă (6);

2). Luînd p=0, teorema 1 ne furnizează tocmai formula termenului general al şirului (u_n) în funcţie de u_0, care rezolvă problemele clasice puse în legătură cu o recurenţă omografică.

3). Procedînd analog obţinem

Teorema 2.

Şirul $(v_n)_{n\geq 0}$ *definit de (7)+(8) satisface una din următoarele relaţii de recurenţă, şi anume*

$$v_{n+p}=\frac{b(v_p-a)+a(b-v_p)c^n}{v_p-a+(b-v_p)c^n}\ ,\ \textit{pentru orice } n,p\in\mathbf{N}, \qquad (13)$$

dacă $a\neq b$, *respectiv*

$$v_{n+p}=\frac{na^2-(n-1)av_p}{(n+1)a-v_p}\ ,\ \textit{pentru orice } n,p\in\mathbf{N}, \qquad (13')$$

dacă $a\neq b$.

Folosind acum aceste rezultate, putem demonstra uşor

Teorema 3.

Şirurile duale $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$, *definite de relaţiile (6)+(8), respectiv (7)+(8), sînt convergente şi*

$$\lim_{n\to\infty} u_n\ ,\ \lim_{n\to\infty} v_n \in \{a,b\}$$

Demonstraţie.

Facem demonstraţia numai pentru (u_n), pentru dualul său fiind analoagă.
Deosebim cazurile: 1) $a\neq b$ şi 2) $a=b$. 1) Folosim (9). Dacă $u_0=a$ sau $u_0=b$ atunci $u_n=a$, respectiv $u_n=b$, pentru orice $n\in\mathbf{N}$, şi afirmaţia este adevărată.
Dacă $u_0\notin\{a,b\}$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\begin{cases} a, & daca\ |a|>|b| \\ b, & daca\ |a|<|b|, \end{cases}$$

ceea ce rezultă direct din relaţia (9).
În cazul 2) folosim formula (9') şi obţinem

$$\lim_{n\to\infty} u_n=b\ ,$$

atît pentru $u_0=b$ cît şi pentru $u_0\neq b$. Demonstraţia este completă.

Dăm acum rezultatul privitor la mulţimea valorilor neadmise pentru şirurile omografice.
Prin mulţimea valorilor neadmise ale unui şir omografic vom înţelege mulţimea tuturor acelor numere $\alpha\in\mathbf{R}$, care nu se pot găsi printre termenii săi. Aceasta înseamnă că, dacă există un $m\in\mathbf{N}$, astfel încît

$$u_m=\alpha\ ,$$

atunci, pentru un anumit rang $k=k(m)$, relaţia (6), respectiv (7), este imposibilă.
Avem

Teorema 4.

Mulţimea valorilor neadmise pentru şirul $(u_n)_{n\geq 0}$, *definit de relaţiile (6)+(8), este cel mult numărabilă.*
Ea este formată din termenii dualului său $(v_n)_{n\geq 0}$ *definit de relaţiile (7)+(8) şi condiţia iniţială* $v_0=0$.

Demonstrație.

Dacă $a \neq b$, atunci, pe baza argumentelor din demonstrația teoremei 1, impunînd condiția ca numitorul fracției din (12) să fie nenul obținem că

$$u_p \neq \frac{ac^n-b}{c^n-1}\ ,\ p\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}^* \qquad (14)$$

Dar membrul drept al relației (14) este tocmai termenul de rang n-1 al șirului $(v_n)_{n\geq 0}$ dat de relațiile (7)+(8) și condiția inițială $v_0=0$, după cum se constată înlocuind în relația (13).

În cazul a=b procedăm analog, impunînd condiția ca numitorul fracției din (9') să fie nenul și obținem

$$u_n \neq \frac{n-1}{n}\cdot b\ ,\ p\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}^*, \qquad (15)$$

iar membrul drept al relației (15) este tocmai termenul de rang n-1 al șirului $(v_n)_{n\geq 0}$ dat de relațiile (7)+(8) și condiția $v_0=0$, fapt ce rezultă din (13'). Demonstrația este completă.

În mod asemănător se demonstrează

Teorema 5.

Mulțimea valorilor neadmise pentru șirul $(v_n)_{n\geq 0}$ *definit de relațiile (7)+(8) este cel mult numărabilă.*

Ea este formată din termenii dualului său $(u_n)_{n\geq 0}$, *definit de relațiile (6)+(8) și condiția inițială* $u_0=a+b$.

Aplicație.

Pentru problema P1, avem că dualul șirului u_n $(=x_n)$ este dat de relația

$$v_{n+1}v_n-2v_{n+1}-3=0$$

Avem $(-2)^2-4(-3)>0$, deci ne situăm în cazul deja tratat, iar a=3, b=-1.

Deoarece $a\neq b$, obținem

$$v_{n+p}=\frac{b(v_p-a)+a(b-v_p)c^n}{v_p-a+(b-v_p)c^n}\ ,n,p\in\mathbb{N}$$

și luînd p=0, $v_0=0$, rezultă că mulțimea valorilor neadmise pentru șirul definit prin relația (1) este

$$\{\alpha\in\mathbb{R}|\alpha=\frac{3(-1)^{n+1}+3^{n+1}}{(-1)^{n+1}-3^{n+1}},\ n\in\mathbf{N}\}$$

Pot fi obţinute acum uşor valorile neadmise, deja cunoscute, dînd lui **n** primele 4 valori naturale:

n	0	1	2	3
α	$\underline{0}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{6}{7}$	$-\frac{21}{20}$

Deoarece mulţimea valorilor neadmise este situată în

$$\{0\}\cup[-\frac{3}{2},\ -\frac{6}{7}],$$

înseamnă că am obţinut şi un rezultat nou, care poate constitui enunţul unei probleme.
Să se arate că pentru $n\in\mathbf{N}^*$, avem

$$-\frac{3}{2}\le\frac{3(-1)^{n+1}+3^{n+1}}{(-1)^{n+1}-3^{n+1}}\le-\frac{6}{7}$$

Este interesantă şi forma numerelor α: ele reprezintă, în forma ireductibilă, fracţii, avînd numitorul şi numărătorul numere naturale consecutive, alternativ.

Recomandăm cititorului să abordeze, cu ajutorul teoremelor 1-3, problemele incluse ca aplicaţii în [1].
Trecem acum la tratarea cazului

2. Ecuaţia caracteristică are rădăcini complexe.

În această situaţie

$$\alpha^2-4\beta<0$$

şi se constată imediat că rezultatele obţinute la cazul precedent rămîn valabile, mai puţin teorema 3, care are o cu totul altă concluzie.

Remarcăm că în acest caz avem

$$a,b\in\mathbf{C}^*\setminus\mathbb{R},\quad \bar{a}=b \qquad (8')$$

şi putem demonstra

Teorema 6.

Dacă există $m\in\mathbf{N}^*$ și $k\in\{1,2,\ldots,2m-1\}$ *astfel încît*

$$\arg a=\frac{k\pi}{m},$$

atunci șirurile duale $(u_n)_{n\geq 0}$, $(v_n)_{n\geq 0}$, *definite de (6)+(8'), respectiv (7)+(8'), sînt periodice, de perioadă m.*

Demonstrație.

Avem

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{\bar{a}}=\frac{a^2}{\bar{a}\cdot a}=\left(\frac{a}{|a|}\right)^2=\left(\cos\frac{k\pi}{m}+i\sin\frac{k\pi}{m}\right)^2$$

deci

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi=1,$$

prin urmare

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}=\left(\frac{a}{b}\right)^n,\ \textit{pentru orice}\ n\in\mathbf{N},$$

ceea ce dovedește, pe baza teoremelor 1, respectiv 2 tocmai periodicitatea șirurilor duale.

Observații.

1). Este clar acum că, în cazul 2, șirurile duale sînt convergente numai dacă sînt constante;

2). Numeroase probleme apărute în revistele de matematică, ce se încadrează în tematica studiată aici, sînt formulate fie incomplet, fie în condiții mult prea restrictive.

Rezultatele consemnate aici arată că pentru o problemă de tipul (*) nu trebuie enunțată nici o condiție inițială, aceasta fiind intrinsecă relației de recurență, adică implicit îndeplinită.

Astfel, problema P1 ar trebui reformulată astfel:

P2. Să se arate că șirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relația (*) este convergent.

Aplicație.

Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ dat prin relația

$$a_{n+1}a_n-2a_{n+1}+2=0\ ,\quad n\geq 0,$$

este periodic.

(O extindere a problemei 2567 din R.M.T.)

Soluţie. Aplicăm teorema 6.

Avem a=1+i, b=1-i, deci

$$arg\ a=\frac{\pi}{4},$$

aşadar şirul este periodic de perioadă 4.

Recomandăm în final cititorului să abordeze singur problemele 12390, 15728, 15222, 15896, 16081, 16171, 16250, şi 18474 din Gazeta Matematică, confruntînd rezultatele cu cele din [1], pentru a se convinge de simplitatea metodei noastre.

Nu putem încheia această notă fără a atrage atenţia cititorului - avînd ca argument rezultatele expuse - că atunci cînd este pus în faţa unei probleme de matematică, trebuie să o abordeze în mod creator, căutînd şi alte soluţii decît cele clasice. Răsplata pentru acest efort este adesea materializată în descoperirea unor rezultate interesante şi noi chiar şi acolo unde totul părea dinainte elucidat.

Observaţie.

Întrucît un şir de numere reale este o funcţie

$$f:\mathbf{N}\to\mathbf{R},$$

putem privi o relaţie de recurenţă omografică (2) ca o ecuaţie funcţională

$$f(n+1)=\frac{af(n)+b}{cf(n)+d}\ ,$$

astfel că este natural să recomandăm cititorului să încerce abordarea ecuaţiei funcţionale

$$f(x+1)=\frac{af(x)+b}{cf(x)+d}\ ,$$

unde $f:E\to F$, $E,F\subset\mathbf{R}$ este funcţia necunoscută. Ar putea fi regăsite, în cazul particular $E=\mathbf{N}$, rezultatele din această lucrare.

B I B L I O G R A F I E

1. AVĂDANEI, C.,ş.a.: De la matematica elementară spre matematica superioară, Editura Academiei, 1987.

2. BERINDE, V.: Asupra unei probleme de concurs, Gazeta Matematică, Nr.6/1985, 186-188.

3. BERINDE, V.: Asupra unui criteriu necesar şi suficient pentru convergenţa şirurilor, ASTRA MATEMATICĂ, vol.I, Nr.5/1990, 18-21.

4. COCUZ, M.:Culegere de probleme de matematică, Editura Academiei, 1984.

UNIVERSITATEA DIN BAIA MARE
FACULTATEA DE LITERE ŞI ŞTIINŢE