Universitatea din Baia Mare
Lucrările Seminarului de creativitate matematică,
Vol.1(1991-1992), pag. 15-23

DETERMINAREA UNOR IZOMORFISME DE GRUPURI

Gheorghe BOROICA

Determinarea oricărui izomorfism între grupurile $(G,*)$ și $(\Gamma,\circ)$ presupune găsirea unei soluții a ecuației funcționale $f(x*y)=f(x)\circ f(y)\ (\forall)\ x,y\in G$, în mulțimea bijecțiilor de la G la Γ.

Scopul acestui articol este găsirea izomorfismului de la problema 20778* din G.M. 5/1986 și determinarea unor izomorfisme între anumite grupuri, izomorfisme care apar în manualul de algebră de clasa a XII-a.

Vom determina izomorfismele respective cu presupunerea că acestea sînt funcții derivabile pe domeniul lor de definiție.

Observația 1. Este posibil ca derivabilitatea funcției să rezulte chiar din satisfacerea ecuației funcționale, vezi, de exemplu problema CE 56 din [6].

Observația 2. Este posibil, să cerem derivabilitatea funcției căutate într-un singur punct și din satisfacerea ecuației funcționale, să rezulte derivabilitatea pe tot domeniul de definiție, vezi, de exemplu problema PD 34 din [6].

Observația 3. Există ecuații funcționale ale căror soluții nu sînt, în mod necesar funcții continue, cu atît mai puțin derivabile pe domeniul considerat; vezi de exemplu problema 197 din [5].

Se știe că dacă $(G,*)$ și $(\Gamma,\circ)$ sînt două grupuri și dacă $f:G\to\Gamma$ este un izomorfism, atunci și funcția inversă $f^{-1}:\Gamma\to G$, dată de legea $f^{-1}(u\circ v)=f^{-1}(u)*f^{-1}(v)\ (\forall)\ u,v\in\Gamma$ este tot un izomorfism.

De aceea, dacă două grupuri sînt izomorfe atunci între ele nu există în mod necesar un izomorfism unic (abstracție făcînd eventual de situația în care $f=f^{-1}$ și f izomorfism de grupuri).

Datorită observației 3 vom determina în problemele care vor fi analizate doar acele izomorfisme care au proprietatea că sînt funcții derivabile pe domeniile considerate.

Problema 1. *Fiind dată corespondența*

$$\varphi: I_{ab}\times I_{ab}\to I_{ab} \quad \text{unde} \quad I_{ab}=(a,b)\subset\mathbb{R},\ a<b,$$

$$(x,y)\to\varphi(x,y)=x*y=\frac{(a+b)xy-2ab(x+y)+ab(a+b)}{2xy-(a+b)(x+y)+a^2+b^2},$$

să se arate că $(I_{ab},*)$ *este grup abelian și* $(I_{ab},*)\approx(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ *unde* $\mathbb{R}_+^*=(0;+\infty)$

(Problema 20778* din G.M. 5/1986, pag.169)

Soluție. Nu insistăm asupra faptului că $(I_{ab},*)$ este grup. Vom determina izomorfisme care sînt derivabile pe $\mathbb{R}^*_+$.
Dacă $f:(\mathbb{R}^*_+,\cdot)\to(I_{ab},*)$ este izomorfism atunci avem

$$f(xy)=f(x)*f(y)\quad (\forall)\ x,y>0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(xy)\frac{(a+b)f(x)f(y)-2ab(f(x)+f(y))+ab(a+b)}{2f(x)f(y)-(a+b)(f(x)+f(y))+a^2+b^2}\qquad(1)$$
$$(\forall)\ x,y>0$$

Luăm în (1) y=1 (1 este elementul neutru în grupul $(\mathbb{R}^*_+,\cdot)$) și efectuînd calculele obținem identitatea:

$$[2f(1)-(a+b)]\cdot[(f(x))^2-(a+b)f(x)+ab]=0$$

de unde deducem că

$$f(1)=\frac{a+b}{2}\qquad(2)$$

Derivăm identitea (1) în raport cu y, luăm apoi y=1 și ținînd seama de relația (2) obținem identitatea:

$$x\cdot f'(x)\cdot(a-b)^2=-4f'(1)\,[(f(x))^2-(a+b)f(x)+ab]\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x\cdot f'(x)\cdot(a-b)^2=-4f'(1)(f(x)-a)(f(x)-b)\quad(\forall)\,x>0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f'(x)=\frac{c}{x}\cdot(f(x))^2-\frac{c(a+b)}{x}f(x)+\frac{cab}{x}\quad(\forall)\,x>0\quad(3)\quad \text{cu}\quad c=\frac{-4f'(1)}{(a-b)^2}$$

Notînd $y=f(x)$ ecuaţia diferenţială (3) se scrie

$$(4)\qquad y'=\frac{c}{x}\cdot y^2-\frac{c(a+b)}{x}y+\frac{cab}{x}$$

care este o ecuaţie diferenţială de tip Riccati. Se observă că $y_1=a$ şi $y_2=b$ sînt două soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (4). Făcînd substituţia

$$z=\frac{y-y_1}{y-y_2}\quad(5)$$

ecuaţia diferenţială (4) se reduce la rezolvarea ecuaţiei liniare omogene în z:

$$z'-\frac{c}{x}(a-b)z=0\Rightarrow\frac{dz}{z}=\frac{c}{x}(a-b)dx\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ln|z(x)|=c(a-b)\ln x+\ln A,\ A>0\Rightarrow$$
$$|z(x)|=A\cdot x^{c(a-b)}\quad cu\quad A>0\Rightarrow z(x)=A'x^{c(a-b)},\quad A'\in\mathbb{R},\ A'\neq 0$$

Pentru $A'=0$ obţinem $z=0$ şi din (5)$\Rightarrow y=y_1$ care este soluţie.
Deci

$$z(x)=A'\cdot x^{c(a-b)}\quad cu\quad A'\in\mathbb{R}$$

Avem $z(1)=A'$. Dar

$$z(1)=\frac{f(1)-a}{f(1)-b}=\frac{\frac{a+b}{2}-a}{\frac{a+b}{2}-b}=-1$$

Deducem $z(x)=-x^{c(a-b)}$ iar din (5) rezultă că

$$f(x)=\frac{a+b\cdot x^{c(a-b)}}{1+x^{c(a-b)}}$$

Notăm $c(a-b)=\alpha$ şi studiem funcţia

$$f(x)=\frac{a+b\cdot x^{\alpha}}{1+x^{\alpha}},\quad x\in(0;+\infty)$$
$$f'(x)=\frac{\alpha(b-a)x^{\alpha}}{(1+x^{\alpha})^2}$$

Luăm $\alpha>0$ şi atunci pentru funcţia f avem următorul tablou de variaţie:

Tabelul 1

x	0					$+\infty$
$f'(x)$	|	+	+	+	+	+
$f(x)$	|| a	$\nearrow$		$\nearrow$	$\nearrow$	b

Deducem că **f** este injectivă fiind strict crescătoare pe $(0;+\infty)$ şi este surjectivă căci $f((0;+\infty))=(a,b)$. Deci **f** este injectivă.
Dacă luăm $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$ atunci

$$f:\mathbb{R}_+^*\to I_{ab},\quad f(x)=\frac{a+bx^\alpha}{1+x^\alpha}$$

este izomorfism (6).
Analog, se demonstrează că şi pentru $\alpha<0$ funcţia de la (6) este izomorfism. Pentru $\alpha=0$ funcţia de la (6) este morfism fără a fi izomorfism.

Observaţia 4. Din cele arătate mai sus deducem că orice izomorfism

$$f:(\mathbb{R}_+^*,\cdot)\to(I_{ab},*)$$

care este o funcţie derivabilă pe $\mathbb{R}^*_+$, este de forma

$$f(x)=\frac{a+bx^\alpha}{1+x^\alpha}\quad cu\ \alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\neq 0,$$

iar orice morfism derivabil

$$f:(\mathbb{R}_+^*,\cdot)\to(I_{ab},*)$$

este de forma

$$f(x)=\frac{a+bx^\alpha}{1+x^\alpha}\quad cu\ \alpha\in\mathbb{R}$$

Observaţia 5. Rămîne ca problemă deschisă situaţia ca ecuaţia funcţională (1) să admită eventual şi alte soluţii care să fie funcţii nederivabile pe $\mathbb{R}^*_+$ şi totuşi să fie izomorfisme de grupuri.

Observaţia 6. Se putea determina un izomorfism **f** şi căutînd pe **f** de forma unei funcţii omografice (situaţia cu $\alpha=1$).

Observaţia 7. În legătură cu ecuaţia diferenţială Riccati, este demn de remarcat faptul că dacă y_1, y_2, y_3, y_4 sînt patru soluţii distincte ale acestei ecuaţii, atunci biraportul

$$\frac{y_3(x)-y_1(x)}{y_3(x)-y_2(x)} : \frac{y_4(x)-Y_1(x)}{y_4(x)-y_2(x)}$$

este constant.

Dacă se cunosc trei soluţii particulare pentru ecuaţia Riccati, atunci pentru a integra această ecuaţie nu mai este necesară nici o cvadratură. Acest fapt este o consecinţă directă a proprietăţii de mai sus, referitoare la biraportul a patru soluţii.

(vezi problema 65 pag.37 din [4])

Observaţia 7'. Pentru a=1, b=2 se obţine problema 25.2 din [7], iar izomorfismul respectiv se consideră pentru $\alpha=-1$.

Problema 2. *Arătaţi că corespondenţa*

$$(x,y)\to(x*y)\overset{def}{=}(x+y)\,|\,(1+xy)$$

este o lege de compoziţie pe intervalul G=(-1,1), (G,) este grup abelian şi că* $(G,*)\approx(\mathbb{R}^*_+,\circ)$.

(Ex.2 pag.56 şi ex.24 pag.58 din [1])

Soluţie. Nu demonstrăm că (G,*) este grup abelian.

Fie

$$f:(\mathbb{R}^*_+,\cdot)\to(G,*)\ \ izomorfism\ \to f(xy)=f(x)*f(y)\quad(\forall)\ x,y>0\to$$
$$\to f(xy)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}\quad(\forall)\ x,y>0\quad(1)$$

Luăm în (1) y=1 şi efectuînd calculele obţinem identitatea $f(1)(f^2(x)-1)=0$ $(\forall)x>0$ de unde rezultă că $f(1)=0$ (2).
Derivînd (1) în raport cu y şi luînd apoi y=1 obţinem identitatea

$$x\cdot f'(x)=f'(1)\,(1-(f(x))^2)\to\frac{f'(x)}{1+f(x)}+\frac{f'(x)}{1-f(x)}=\frac{2f'(1)}{x}\quad(\forall)\ x>0\to$$
$$\to\ln\left|\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right|=2f'(x)\ln x+\ln c,\quad(\forall)x>0\ \ si\ \ c>0\to$$
$$\to\frac{1+f(x)}{1-f(x)}=c'\cdot x^{2f'(1)},\quad c'\in\mathbb{R}^*$$

Dar f(1)=0 şi deci va rezulta că c'=1, ca urmare **f** va fi de forma

$$f(x)=\frac{x^{2f'(1)}-1}{x^{2f'(1)}+1}$$

Notăm $2f'(1)=a$ şi analizînd funcţia f deducem că este bijectivă pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Dacă $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ atunci

$$f:(\mathbb{R}_+^*,\cdot)\to(G,*)$$

dată de legea

$$f(x)=\frac{x^a-1}{x^a+1}$$

este izomorfism. Dacă $a=0$ atunci f este morfism fără a fi izomorfism.

Problema 3. *Fie*

$$G=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$

şi pentru orice $x,y\in G$ *fie* $x*y=arctg(tgx+tgy)$. *Arătaţi că* $(G,*)$ *este grup şi că* $(G,*)\approx(\mathbb{R},+)$.

(Ex.25 pag.59 din [1])

Soluţie. Fie

$$f:(G,*)\to(\mathbb{R},+)\ \ izomorfism\ \to f(x*y)=f(x)+f(y)\quad(\forall)x,y\in G\to$$
$$\to f(arctg(tgx+tgy))=f(x)+f(y)\quad(\forall)x,y\in G\quad(1)$$

Luăm în (1) $y=0$ şi obţinem $f(0)=0$ (2).

Derivăm (1) în raport cu y şi luînd apoi $y=0$ obţinem:

$$\frac{f'(x)}{1+tg^2x}=f'(0)\to f'(x)=\frac{f'(0)}{\cos^2x}\to f'(x)=f'(0)(tgx)'\to$$
$$\to f(x)=f'(0)\,tgx+c$$

Dar $f(0)=0$ şi deducem $c=0$, ca urmare $f(x)=atgx$ cu $a=f'(0)$.

Pentru orice $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ funcţia $f:(G,*)\to(\mathbb{R},+)$ dată de legea $f(x)=a\cdot tgx$, $(\forall)x\in G$ este izomorfism de grupuri.

Pentru $a=0$ avem morfismul $f:(G,*)\to(\mathbb{R},+)$, $f(x)=0$ $(\forall)x\in G$.

Problema 4. *Grupul aditiv* $(\mathbb{R},+)$ *al numerelor reale este izomorf cu grupul multiplicativ* $(\mathbb{R}^*_+,\cdot)$ *al numerelor reale strict pozitive.*

(Ex.1 pag.53 din [1])

Soluţie. Fie

$$f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}_+^*,\cdot) \text{ un izomorfism } \Rightarrow f(x+y)=f(x)f(y) \quad (\forall)x,y\in\mathbb{R} \quad (1)$$

Derivăm identitatea (1) în raport cu y şi luînd apoi y=0 obţinem $f'(x)=f(x)f'(0)$. Notăm $a=f'(0)$ şi avem

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=a\Rightarrow \ln|f(x)|=ax+\ln c,\ c>0 \Rightarrow f(x)=c'e^{ax} \text{ cu } c'\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \quad (2)$$

Luînd y=0 obţinem identitatea $f(x)(1-f(0)=0$ şi pentru că f este bijectivă deducem că $f(0)=1$ (3).

Din (2) şi (3) rezultă $c'=1$ şi deci $f(x)=e^{ax}$.

Pentru orice $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ funcţia $f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}^*_+,\circ)$ dată de legea $f(x)=e^{ax}$ $(\forall)x\in\mathbb{R}$ este izomorfism de grupuri.

Pentru a=0 obţinem morfismul $f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}^*_+,\cdot)$, $f(x)=1$ $(\forall)x\in\mathbb{R}$.

Problema 5. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie internă

$$x*y=x\sqrt[2]{1+y^2}+y\sqrt[2]{1+x^2}$$

Demonstraţi că $(\mathbb{R},+)\approx(\mathbb{R},*)$.

Soluţie.

$(\mathbb{R},*)$ este grup comutativ cu elementul neutru e=0.

Fie

$$f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R},*) \text{ un izomorfism } \Rightarrow$$
$$f(x+y)=f(x)*f(y) \quad (\forall)x,y\in\mathbb{R}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x+y)=f(x)\sqrt{1+(f(y))^2}+f(y)\sqrt{1+f(x))^2} \quad (\forall)x,y\in\mathbb{R} \quad (1)$$

Luăm x=y=0 în (1) şi obţinem $f(0)=0$ (2)

Derivăm (1) în raport cu y şi luînd apoi y=0 obţinem:

$$\frac{f'(x)}{\sqrt[2]{1+(f(x))^2}}=f'(0)$$

Bijectivitatea lui f impune $a=f'(0)\neq 0$ şi trecînd la primitive avem

$$\ln(f(x)+\sqrt{1+(f(x))^2}=ax+\ln c,\ c>0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x)+\sqrt{1+(f(x))^2}=e^{ax}c$$

Dar $f(0)=0$ şi rezultă c=1. Deducem atunci că

$$f(x)=\frac{e^{ax}-1}{2e^{ax}} \rightarrow f(x)=\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$$

Pentru orice $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ funcţia $f:(\mathbb{R},+)\rightarrow(\mathbb{R},*)$ dată de legea $f(x)=sh(ax)$ este izomorfism de grupuri.
Pentru $a=0$ funcţia $f:(\mathbb{R},+)\rightarrow(\mathbb{R},*)$ dată de legea $f(x)=0$ este morfism de grupuri.

Observaţia 8. Punerea problemei poate fi formulată şi mai general: determinarea morfismelor, în particular a izomorfismelor. În problemele analizate au fost determinate atît morfismele derivabile cît şi izomorfismele derivabile. La fiecare problemă s-a găsit în plus doar morfismul nul.

Observaţia 9. Problema G 78 din [2] determină pentru o aplicaţie bijectivă $f:G\rightarrow H$, unde $(G,*)$ este grup, unicul grup $(H,0)$ astfel ca aplicaţia **f** să fie un izomorfism de grupuri. Se pot formula următoarele probleme:

I. Fiind date două grupuri $(G,*)$ şi $(H,0)$ şi o aplicaţie $f:G\rightarrow H$, ce condiţii trebuie să îndeplinească funcţia **f** pentru ca **f** să reprezinte unicul morfism (izomorfism) de la G la H ?

II. Ce se poate spune despre proprietăţile unei clase de morfisme atunci cînd grupurile sînt date?

Observaţia 10. Unul din dezavantajele acestei metode este că conduce la rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale care nu totdeauna este accesibilă elevilor de liceu.

Observaţia 11. Derivabilitatea izomorfismelor căutate a permis transformarea ecuaţiilor funcţionale în ecuaţii diferenţiale.

B I B L I O G R A F I E

1. ION D. Ion; ş.a.: Matematică, Algebră, Manual pentru clasa a XII-a, E.D.P., Bucureşti, 1984.

2. NĂSTĂSESCU C; ş.a.: Probleme de structuri algebrice, Ed.Academiei, Bucureşti, 1988.

3. NICULA Virgil: Problema 20778* din Gazeta Matematică 5/1986.

4. MAROŞANU G.: Ecuaţii diferenţiale. Aplicaţii, Ed.Academiei, Bucureşti, 1989.

5. MOROZA E.A, ş.a.: Olimpiadele Internaţionale de Matematică, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1978.

6. TEODORESCU N.,ş.a.: Probleme din Gazeta Matematică, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1984.

7. NICOLESCU Cătălin-Petru: Sinteze de Matematică, Ed.Albatros, Bucureşti, 1990.

Liceul "Gh. Şincai"
Baia Mare