Universitatea din Baia Mare
Lucrările Seminarului de creativitate matematică,
vol.1(1991-1992), pag. 25-38

CARACTERIZĂRI ALE ŞIRURILOR CONVERGENTE DE NUMERE REALE CU AJUTORUL COMBINAŢIILOR LINIARE A k TERMENI CONSECUTIVI AI SĂI

Vasile BERINDE

Problema 6140 din Revista Matematică a elevilor din Timişoara, nr.1/1987, avînd următorul enunţ:

P1. *Fie* $(a_n)_{n\geq 0}$ *un şir de numere reale şi* $a\in\mathbb{R}$. *Să se arate că*

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a$$

dacă şi numai dacă

$$\lim_{n\to\infty}(4a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n)=a$$

(autor V.Berinde)

evidenţiază un aspect interesant, şi anume echivalenţa dintre convergenţa către numărul a atît a şirului (a_n) cît şi a şirului avînd termenul general o combinaţie liniară a trei termeni consecutivi ai acestuia.

Abordînd creator această problemă - după ce am reuşit să o rezolvăm - se ridică în mod natural întrebarea: ce condiţii trebuie să îndeplinească coeficienţii combinaţiei liniare pentru ca această proprietate să aibă loc?

Faptul că proprietatea dată de problema P1 nu este specifică combinaţiilor liniare a trei termeni consecutivi este dovedită de problema

P2. *Dacă* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ *este un şir de numere reale astfel încît*

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\right)=0$$

să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty} a_n=0,$$

dată la Olimpiada de matematică din U.R.S.S., 1977, care este generalizată în Gazeta Matematică, 7/1980, problema 18351*(autor Gh. Miculescu), unde combinaţia liniară considerată este

$$a_{n+1}-\frac{1}{p}a_n,\quad p\geq 2,$$

respectiv în [2], Aplicaţia 9.1.2, pag.76-77, al cărei enunţ este

P3. *Să se demonstreze că*

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-bx_n)=0,\ b\in(0,1)$$

În [3] se demonstrează un rezultat ce extinde problema P3, considerînd $b\in(-1,1)$, şi apoi pe baza acestuia se rezolvă problema P1 şi alte probleme înrudite. Vom vedea mai tîrziu că cerinţa $b\in(-1,1)$, adică $|b|<1$, este maximală, adică rezultatul dat în [3] este cel mai bun posibil (pentru cazul combinaţiilor liniare a doi termeni consecutivi ai şirului).

Deoarece problema 6141 (autor D. Miheţ) din Revista Matematică a elevilor din Timişoara, nr.1/1987, legată de problema P1, şi lucrarea [5], tratează o chestiune avînd foarte multe puncte comune cu demersul nostru, dar care se îndepărtează în parte de specificitatea problemei noastre. În această lucrare ne propunem să arătăm că rezultatul din [5] poate fi adaptat pentru a răspunde întrebării ridicate de problema P1, de fapt pentru a rezolva următoarea problemă.

Fiind dat un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ *de numere reale, iar* $(y_n)_{n\geq 0}$ *un şir definit prin*

$$y_n=b_0x_n+b_1x_{n+1}+\ldots+b_kx_{n+k},\qquad (1),$$

unde

$$b_0, b_1, \ldots, b_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

se cere să se stabilească în ce condiții (impuse asupra coeficienților $b_0, b_1, \ldots, b_k$) *avem*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} y_n = a \qquad (2)$$

O primă informație ne este dată de implicația "$\Rightarrow$" care impune

$$b_0 + b_1 + \ldots + b_k = 1, \qquad (3)$$

condiție aparent nesatisfăcută de problemele P2 și P3 (faptul că, în aceste cazuri avem a=0, ascunde inerența condiției (3)). Deocamdată, folosind rezultatul din [3], putem da un răspuns complet pentru k=1: echivalența (2) are loc dacă $b_1 \neq 0$, $b_0+b_1=1$ și $|b_0|<|b_1|$.

Folosind un rezultat din [6], extins în [5], vom demonstra rezultatul principal al acestei lucrări.

Teorema 1. *Fie* $k \in \mathbb{N}^*$ și $b_0, b_1, \ldots, b_k$ *numere reale astfel încît*

a) $b_k \neq 0$;
b) $b_0 + b_1 + \ldots + b_k = 1$;
c) *Ecuatia* $b_k t^k + b_{k-1} t^{k-1} + \ldots + b_0 = 0$

are rădăcinile de modul unitar.

În aceste condiții, dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un șir de numere reale iar* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *șirul definit prin relația (1), atunci are loc* ($\cancel{3}$). 2

Demonstrație.

Deoarece în [5] nu apare condiția b), căci acolo nu este luată în considerare decît convergența șirurilor (x_n) și (y_n), nu și identitatea dintre limitele lor, teorema 1 reprezintă o completare a rezultatului din [5].

Este clar că trebuie să demonstrăm doar implicația "$\Leftarrow$" din (2), cealaltă fiind imediată.

Pentru aceasta vom demonstra mai întîi o afirmație făcută anterior, acum în următoarea reformulare.

Lema 1.

Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ *este un șir de numere reale iar* $p, q \in \mathbb{R}$, $|p|<|q|$, *astfel încît*

$$px_n+qx_{n+1}\to(p+q)\cdot a,$$

atunci

$$x_n\to a$$

Demonstraţia lemei.

Condiţia $|p|<|q|$ exclude posibilitatea $q=0$. Aşadar avem $q\neq 0$ implicit. Dacă $p=0$, lema este imediată. Pentru $p\neq 0$, punem

$$z_n=x_n-a$$

Atunci

$$pz_{n+1}+qz_n = p(x_{n+1}-a)+q(x_n-a) = \\ =px_{n+1}+qx_n-(p+q)\cdot a$$

deci, pe baza ipotezei

$$pz_{n+1}+qz_n\to 0,$$

ceea ce este echivalent cu

$$z_{n+1}+\frac{q}{p}z_n\to 0$$

Putem folosi acum rezultatul din [3], cu

$$a=\frac{q}{p},$$

şi obţinem că

$$z_n\to 0,$$

adică tocmai

$$x_n\to a$$

şi cu aceasta lema este demonstrată.

Observaţie.

Avînd în vedere scopul metodico-ştiinţific al acestei note, vom prezenta - la sfîrşit, pentru a nu afecta cursivitatea demonstraţiei teoremei - o altă demonstraţie a rezultatului invocat din [3] şi vom face cîteva observaţii şi precizări utile.

Revenim acum la demonstrația teoremei. Procedăm prin inducție după k. Pentru k=1, aplicînd lema și folosind condiția b), din

$$\lim_{n\to\infty}(b_0x_n+b_1x_{n+1}) = a = (b_0+b_1)\cdot a,$$

rezultă

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

Presupunem că proprietatea are loc pentru k=m termeni consecutivi în combinație liniară, adică

$$\lim_{n\to\infty}(b_0x_n+b_1x_{n+1}+\ldots+b_mx_{n+m} = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

și o demonstrăm pentru k=m+1.

Fie

$$b_0, b_1, \ldots, b_m, b_{m+1}\in\mathbb{R},\quad b_{m+1}\neq 0$$
$$b_0+b_1+\ldots+b_{m+1} = 1$$

Considerăm șirul $(u_n)_{n\geq 0}$, definit prin

$$u_n = b_{m+1}x_{n+m+1}+b_mx_{n+m}+\ldots+b_1x_{n+1}+b_0x_n,$$

și fie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$ rădăcinile ecuației

$$b_{m+1}t^{m+1}+b_mt^m+\ldots+b_1t+b_0 = 0 \qquad (4)$$

Dacă notăm cu s_i funcțiile simetrice elementare în variabilele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, adică

$$s_1 = \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m,$$
$$s_2 = \alpha_1\alpha_2+\ldots+\alpha_1\alpha_m+\ldots+\alpha_{m-1}\alpha_m,$$
$$\vdots$$
$$s_m = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m,$$

iar cu S_j, $j=1,2,\ldots,m+1$, funcțiile simetrice elementare în variabilele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$, atunci considerînd șirul $(z_n)_{n\geq m}$,

$$z_n = x_{n+m}-s_1x_{n+m-1}+s_2x_{n+m-2}+\ldots+(-1)^ms_mx_n,$$

se arată ușor prin calcul direct că

$$\begin{gathered}
z_{n+1}-\alpha_{m+1}z_n = x_{n+m+1}-s_1x_{n+m}+s_2x_{n+m-1}+\ldots+(-1)^m s_m x_{n+1}- \\
-\alpha_{m+1}[x_{n+m}-s_1x_{n+m-1}+s_2x_{n+m-2}+\ldots+(-1)^m s_m x_n] = \\
=x_{n+m+1}-(s_1+\alpha_{m+1})x_{n+m}+(s_2+\alpha_{m+1}s_1)x_{n+m-1}+\ldots \\
+(-1)^m(s_m+\alpha_{m+1}s_{m-1})x_{n+1}+(-1)^{m+1}\alpha_{m+1}s_m x_n= \\
=x_{n+m+1}-s_1x_{n+m}+s_2x_{n+m-1}+\ldots+(-1)^{m+1}s_{m+1}x_n
\end{gathered}$$

Dar α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_m$, α_{m+1} sînt rădăcinile ecuației (4), deci

$$s_j=(-1)^j\frac{b_{m+1-j}}{b_{m+1}},\ j=1,2,\ldots,m+1,$$

așadar

$$z_{n+1}-\alpha_{m+1}z_n=x_{n+m+1}+\frac{bm}{b_{m+1}}x_{n+m}+\frac{b_{m-1}}{b_{m+1}}x_{n+m-1}+\ldots+\frac{b_0}{b_{m+1}}x_n,$$

ceea ce înseamnă tocmai

$$z_{n+1}-\alpha_{m+1}z_n=\frac{1}{b_{m+1}}u_n$$

Prin urmare, din

$$\lim_{n\to\infty}(b_0x_n+b_1x_{n+1}+\ldots+b_mx_{n+m})=a,$$

adică

$$u_n\to a,$$

rezultă

$$z_{n+1}-\alpha_{m+1}z_n\to\frac{a}{b_{m+1}}$$

Dar, pe baza condiției c), $|\alpha_{m+1}|<1$, deci aplicînd lema, cu $p=-\alpha_{m+1}$, $q=1$, deducem că

$$z_n\to\frac{a}{(1-\alpha_{m+1})b_{m+1}},$$

adică

$$(1-\alpha_{m+1})b_{m+1}z_n\to a$$

Însă șirul

$$((1-a_{m+1})b_{m+1}z_n)_{n\ge0}$$

are termenul general dat printr-o combinaţie liniară a **m** termeni consecutivi ai şirului $(x_n)_{n\ge0}$.

Mai mult, ecuaţia ataşată acestui şir este

$$b_{m+1}(1-a_{m+1})[t^m-s_1t^{m-1}+s_2t^{m-2}+\ldots+(-1)^m s_m]=0,$$

ale cărei rădăcini sînt numerele (reale sau complexe) α_1, $\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ de modul subunitar, iar suma coeficienţilor acestei ecuaţii este

$$\begin{aligned}b_{m+1}(1-a_{m+1})[1-s_1+s_2-\ldots+(-1)^m s_m]&=\\=b_{m+1}[1-S_1+S_2-\ldots+(-1)^{m+1}S_{m+1}]&=\\=b_{m+1}\frac{b_{m+1}+b_m+\ldots+b_0}{b_{m+1}}&=1\end{aligned}$$

Aşadar, sînt îndeplinite condiţiile b) şi c), şi atunci, conform ipotezei de inducţie (şi anume, (3) are loc pentru k=m), rezultă tocmai

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a$$

În concluzie, potrivit principiului inducţiei matematice, proprietatea din enunţul teoremei are loc pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$. Demonstraţia este completă.

Observaţii.

1). Condiţia c) din teorema 1 nu poate fi slăbită, după cum arată exemplul 1;

2). Utilitatea teoremei 1 este ilustrată atît de problema P1 şi celelalte înrudite cît şi de exemplul 2.

3). Toate consideraţiile noastre au fost făcute pentru cazul în care şirul de caracterizare, $(y_n)_{n\ge0}$, este definit ca o combinaţie liniară a k termeni consecutivi ai şirului $(x_n)_{n\ge0}$, unde k este constant.

Însă problema ridicată de noi are sens şi pentru cazul în care k nu este constant după cum ne sugerează binecunoscutul rezultat

$$x_n\to a \Rightarrow \frac{x_1+x_2+\ldots+x_2}{n}\to a,$$

situaţie în care formularea ei poate fi dată astfel.
Fie (x_n) un şir de numere reale, $(k_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un şir de numere naturale, dat, şi $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un şir de numere reale, iar $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un şir definit prin

$$y_n = b_0x_n+b_1x_{n+1}+\ldots+b_{k_n}x_{n+k_n},\ n\geq 0$$

Să se determine în ce condiţii asupra şirurilor $(k_n)_{n\in\mathbf{N}}$ şi $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ are loc (2).
Putem considera că teorema 1 este un răspuns la această nouă problemă, cînd

$$k_n=k\ (constant),\quad n\geq 1$$

şi

$$b_n=0,\ pentru\quad n>k$$

Lăsăm pe seama cititorului abordarea acestei probleme.
Exemplul 1.

Şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ definite prin

$$s_{4n+1}=-1,\ x_{4n+2}=2,\ x_{4n+3}=3,\ x_{4n}=0,\ n\geq 0,$$

respectiv prin

$$y_n=2,\quad n\geq 0,$$

sînt legate între ele prin relaţia

$$y_n=\frac{x_n+x_{n+2}}{2},\quad n\geq 0,$$

aşadar, cu notaţiile adoptate în această lucrare, avem

$$k=2,\ b_0=\frac{1}{2},\ b_1=0,\ b_2=\frac{1}{2}$$

Condiţiile a) şi b) din teorema 1 sînt îndeplinite dar ecuaţia

$$\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}=0$$

are rădăcinile de modul unitar (şi nu subunitar cum cere condiţia c)).

Datorită acestui fapt, şirul (x_n) este divergent, cu toate că şirul (y_n) este convergent (fiind şirul constant 2).

Exemplul 2.

Fie $(u_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale iar $(v_n)_{n\geq 1}$ şirul definit prin

$$v_n=\frac{u_n+2u_{n+1}}{3}$$

Să se arate că

$$\lim_{n\to\infty} u_n=a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} v_n=a$$

Soluţie.

Se aplică teorema 1, pentru

$$k=1,\ b_0=\frac{1}{3},\ b_1=\frac{2}{3}$$

Recomandăm cititorului să încerce o abordare directă a acestei probleme.

Observaţie.

Pentru problema P1, R.M.T. nu a mai publicat soluţia (autorului) datorită faptului că lucrarea [3] acoperea şi această problemă. Din acest motiv, pe de o parte, iar pe de altă parte, pentru a arăta că, deşi problemele P1 şi P2 (respectiv P3) sînt cazuri particulare ale teoremei 1, totuşi autorul problemei P1 nu a obţinut-o încercînd să extindă problema P2 la cazul a trei termeni consecutivi, ci altfel, din aceste motive deci, şi avînd totodată în vedere scopul metodic al acestei lucrări, prezentăm în continuare, într-o formă uşor generalizată, soluţia problemelor 6140 şi 6141 din R.M.T. nr.1/1987. Ea este dată de

Teorema 2.

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $b\in(1,\infty)$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \qquad (5)$$

dacă şi numai dacă

$$\lim_{n\to\infty}(b^2u_{n+2}-2bu_{n+1}+u_n)=(b-1)^2\cdot a \qquad (6)$$

Demonstrație.

Este nevoie să demonstrăm doar implicația (6)⇒(5).
Pentru aceasta definim şirul $(z_n)_{n\geq 0}$ prin

$$z_n = x_n - \frac{n+1}{b\cdot n}x_{n-1}, \quad n\geq 1, \qquad (7)$$

şi

$$z_0 = 1 .$$

(considerarea şirurilor definite prin relații de forma (7) nu este artificială. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, dat prin

$$x_n = \frac{1}{C_n^0}+\frac{1}{C_n^1}+\dots+\frac{1}{C_n^n},$$

satisface relația de recurență

$$1 = x_n - \frac{n+1}{2n}x_{n-1}, \quad n\geq 2,$$

a se vedea [1], problema 1.139, precum şi problema 0:449, G.M. 8/1985, autor V. Berinde).
Relația (7) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{b^n x_n}{n+1} = \frac{b^{n-1}x_{n-1}}{n} + \frac{b^n}{n+1}z_n, \quad n\geq 1$$

Scriem relația pentru valorile 1,2,...,n ale lui n, apoi adunăm toate aceste relații. Obținem

$$x_n = \frac{(n+1)S_n}{b^n}, \quad n\geq 1, \qquad (8)$$

unde am notat

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{b^k}{k+1}z_k$$

Calculăm

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

aplicînd lema Stolz-Césaro [2]. Notăm

$$a_n = (n+1)S_n, \quad b_n = b^n$$

Deoarece a>1, evident $b_n \to +\infty$.
Dacă există limita

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = m_1,$$

atunci şi

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

există, şi

$$\lim_{n\to\infty} x_n = m_1$$

Dar, efectuînd calculele, obţinem că

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \frac{b^{n+1}z_{n+1}+S_n}{(b-1)b^n},$$

şi mai aplicăm încă o dată Stolz-Césaro, notînd

$$a_n' = b^{n+1}z_{n+1}+S_n ,$$
$$b_n' = (b-1)b^n$$

Aşadar, dacă există limita

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a'_{n+1}-a'_n}{b'_{n+1}-b'_n} = m_2$$

atunci

$$m_1 = m_2$$

Efectuînd calculele obţinem

$$\frac{a'_{n+1}-a'_n}{b'_{n+1}-b'_n} = \frac{1}{(b-1)^2}\cdot(b^2x_{n+2}-2bx_{n+1}+x_n)$$

Aşadar, cum prin ipoteză

$$\lim_{n\to\infty}(b^2x_{n+2}-2bx_{n+1}+x_n) = a$$

rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a'_{n+1}-a'_n}{b'_{n+1}-b'_n} = a,$$

ceea ce înseamnează că $m_2=a$, deci şi $m_1=a$, adică

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

şi cu aceasta demonstraţia este completă.

Observaţie.

Pentru $b=2$, din teorema 2 obţinem problema 6140, iar pentru $b=-2$ şi $a=1$, problema 6141 din R.M.T.

Punînd

$$\frac{1}{b},\ \ cu\ \ b\in(0,1),$$

în loc de b, din teorema 2 obţinem că, pentru $b\in(0,1)$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_{n+2}-2bx_{n+1}+b^2x_n) = (b-1)^2a$$

Dăm acum o demonstraţie a Teoremei 1 din [3], diferită de cea din [1] şi [3], urmînd în esenţă demonstraţia teoremei 2. Enunţul este dat de

Teorema 3.

Dacă $b\in(0,1)$, *iar* $(x_n)_{n\geq 0}$ *un şir de numere reale, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-bx_n) = 0$$

Demonstraţie.

Fie $(z_n)_{n\geq 0}$ şirul definit prin

$$z_n = x_{n+1}-bx_n,\ \ n\geq 1\ \ si\ \ z_0 = x_0$$

Relaţia anterioară se scrie, punînd

$$c = \frac{1}{b}>1,\ \ c^{n+1}x_{n+1} = c^n x_n+c^{n+1}z_n,$$

şi urmînd calea indicată în demonstraţia teoremei 2, obţinem, punînd după efectuarea calculelor

$$x_n = \frac{C+1}{C^n}z_0+\frac{1}{C^{n-2}}z_1+\frac{1}{C^{n-3}}z_2+\ldots+\frac{1}{C}z_{n-2}+z_{n-1},$$

adică, scris sub formă de fracţie

$$x_n = \frac{S_n}{C^n},$$

unde de această dată

$$S_n = (C+1)z_0+C^2z_1+C^3z_2+\ldots+C^nz_{n-1}$$

Pentru a calcula

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

aplicăm Stolz-Césaro. Aşadar

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{C^{n+1}-C^n},$$

dacă limita din membrul drept există.

Dar, efectuînd calculele, se obţine că

$$\frac{S_{n+1}-S_n}{C^{n+1}-C^n} = \frac{Cz_n}{C-1} = \frac{x_{n+1}-bx_n}{1-b},$$

aşadar

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-bx_n}{1-b},$$

şi cu aceasta demonstraţia este completă.

Observaţie.

Este uşor de observat că de fapt noi am demonstrat un rezultat mai general şi anume:

Teorema 4.

Dacă $b\in(0,1)$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-bx_n) = (1-b)\cdot a$$

Întru totul asemănător putem demonstra lema din [5], considerînd $b\in\mathbf{C}$, $|b|<1$ şi (x_n) un şir de numere complexe.

B I B L I O G R A F I E

1. BATINEŢU, D.M.: Şiruri, Editura Albatros, 1979

2. BATINEŢU, D.M., ş.a.: Exerciţii şi probleme de analiză matematică, Editura Didactică şi Pedagogică, 1981.

3. FORGA, C.: Calculul limitelor unor şiruri definite prin relaţii de recurenţă, Revista Matematică a elevilor din Timişoara, nr.1-2/1989, 39-42.

4. MEGAN, M., PREDA, P.: Şiruri reale recurente, Caiete metodico-ştiinţifice, Universitatea Timişoara, nr.20, 1984.

5. MIHEŢ, D., PITICARI, M.: O problemă de convergenţă, Gazeta Matematică (seria metodică), nr.1, 1990, 30-31.

6. PRODANOV, I., ş.a.: Zbornik ot zadaci po diferentialnov i integralno smiatone, Izd. Nauka i iscustvo, Sofia, 1976.

UNIVERSITATEA DIN BAIA MARE
FACULTATEA DE LITERE ŞI ŞTIINŢE