Universitatea din Baia Mare
Lucrările Seminarului de creativitate matematică,
Vol. 1(1991-1992), pag. 39-46

POLIGOANE CU ACELAŞI CENTRU DE GREUTATE

Nicolae MUŞUROIA

Multe probleme de geometrie cer studierea unor figuri geometrice obţinute din construcţia pe laturile unor poligoane a unor triunghiuri particulare. În această notă ne vom ocupa de problema coincidenţei centrelor de greutate ale unor astfel de poligoane.

Abordarea acestor tipuri de probleme în G.M., dar şi în alte lucrări, se face în special bazîndu-se pe metoda vectorială, metodă care are o pondere destul de redusă în programa actuală de liceu. Prezentăm un rezultat simplu care se bazează pe utilizarea numerelor complexe în geometrie, rezultat ce permite rezolvarea unitară a problemelor de acest tip.

Observaţie. Pentru simplitatea scrierii, vom nota în cele ce urmează cu litere mari punctele din planul complex şi cu literele mici corespunzătoare afixele lor.

Amintim cîteva rezultate pe care le vom utiliza pe parcurs.

1. **Definiţie** ([2], **pag.8**). *Centrul de greutate G al poligonului* $A_1A_2...A_n$, $n\geq 3$, *are afixul:*

$$g=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$$

2. **Propoziţie ([4], pag.15)**. *Condiţia necesară şi suficientă ca numerele complexe a,b,c să fie afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral este ca:*

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$$

Demonstrație

Triunghiul ABC fiind echilateral avem

$$(AB)\equiv(BC)\equiv(CA)\quad \text{și}$$
$$m(\measuredangle ABC)=m(\measuredangle BCA)=m(\measuredangle CAB)$$

Deci

$$|b-a|=|c-b|=|a-c|$$

și

$$\arg\frac{a-b}{c-b}=\arg\frac{b-c}{a-c}=\arg\frac{c-a}{b-a}$$

Atunci:

$$\frac{a-b}{c-b}=\frac{b-c}{a-c}$$

adică

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$$

Reciproc, relația dată este echivalentă cu

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

Notăm

$$a-b=z_1,\quad b-c=z_2,\quad c-a=z_3$$

Deci

$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$$

și în plus $z_1+z_2+z_3=0$.

Printr-un calcul simplu se obține

$$z_1^2=z_2\cdot z_3,\quad z_2^2=z_3\cdot z_1,\quad z_3^2=z_1\cdot z_2$$

și în final

$$z_1^3=z_2^3=z_3^3$$

Deci $|z_1|=|z_2|=|z_3|$, sau $|a-b|=|b-c|=|c-a|$.

În concluzie $(AB)\equiv(BC)\equiv(CA)$, deci ABC este triunghi echilateral.

3. **Consecință** ([2], pag.11). *Triunghiul ABC este echilateral dacă și numai dacă afixele vîrfurilor lor verifică relația:*

$$az^2+bz+c=0$$

în orice ordine am lua vîrfurile, unde z este o rădăcină complexă de ordinul trei a unității.

Demonstrație. Avem relația:

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=(a\varepsilon^2+b\varepsilon+c)(a\varepsilon+b\varepsilon^2+c)$$

unde $\varepsilon^3=1$. Folosind propoziția 2 și ținînd cont de faptul că ordinea vîrfurilor nu contează ($\triangle ABC$ este echilateral $\Leftrightarrow$ $\triangle BAC$ este echilateral), obținem concluzia.

4. Teorema ([2], **pag.7**). *Poligoanele* $A_1A_2\ldots A_n$ *și* $B_1B_2\ldots B_n$, *$n\geq 3$ au același centru de greutate dacă și numai dacă*

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)=0$$

Demonstrație. Fie G_1, G_2 centrele de greutate ale celor două poligoane, de afixe g_1 respectiv g_2. Deci:

$$ng_1=\sum_{i=1}^{n}a_i \quad \text{și} \quad ng_2=\sum_{i=1}^{n}b_i$$

Atunci: $G_1=G_2 \Leftrightarrow ng_1=ng_2$, adică

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)=0$$

Prezentăm cîteva aplicații ale acestei teoreme.

Aplicația 1. Pe laturile patrulaterului convex ABCD se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABM, BCN, CDP, DAQ. Să se arate că patrulaterele ABCD și MNPQ au același centru de greutate.

(M. Burtea. 0.400, G.M. 3/1984)

Demonstrație vectorială. (R.M.T. 1-1985)

Fie G centrul de greutate al patrulaterului ABCD. Avem

$$\overline{GA}+\overline{GB}+\overline{GC}+\overline{GD}=\overline{0} \qquad (1)$$

$$\overline{GM}=\overline{GA}+\overline{AM}-\overline{GB}+\overline{BM}$$

Atunci

$$\overline{GM}=\frac{1}{2}\left(\overline{GA}+\overline{GB}\right)+\overline{M'M},$$

unde M' este mijlocul segmentului (AB). Analog

$$\overline{GN}=\frac{1}{2}\left(\overline{GB}+\overline{GC}\right)+\overline{N'N},$$
$$\overline{GP}=\frac{1}{2}\left(\overline{GC}+\overline{GD}\right)+\overline{P'P}$$
$$\overline{GQ}=\frac{1}{2}\left(\overline{GA}+\overline{GD}\right)+\overline{Q'Q}$$

unde N',P',Q' sînt respectiv mijloacele segmentelor (BC), (CD), (DA). Folosind (1) rezultă

$$\overline{GM}+\overline{GN}+\overline{GP}+\overline{GQ}=\overline{M'M}+\overline{N'N}+\overline{P'P}+\overline{Q'Q} \quad (2)$$

Cum triunghiurile ABM, BCN, CDP şi DAQ sînt asemenea, rezultă că (M'M), (N'N), (P'P), (Q'Q) sînt proporţionale cu (AB), (BC), (CD), (DA) iar vectorii

$$\overline{M'M},\ \overline{N'N},\ \overline{P'P},\ \overline{Q'Q}$$

sînt perpendiculari pe AB, BC, CD, DA. Evident

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}=\overline{0}$$

Aşezăm vectorii

$$\overline{AB},\ \overline{BC},\ \overline{CD},\ \overline{DA}$$

cu originea într-un punct O. Suma lor rămîne nulă. Rotind fiecare vector cu un unghi drept în acelaşi sens de rotire cu cel necesar pentru rotirea lui $\overline{M'B}$ în jurul lui M' astfel încît acesta să se suprapună peste $\overline{M'M}$, suma vectorilor obţinuţi după rotire rămîne $\overline{0}$. Înmulţim fiecare vector respectiv cu

$$\frac{M'M}{AB}=\frac{N'N}{BC}=\frac{P'P}{CD}=\frac{Q'Q}{DA}$$

Se obţin vectorii echivalenţi cu

$$\overline{M'M},\ \overline{N'N},\ \overline{P'P},\ \overline{Q'Q}$$

Suma lor este nulă, deci din (2), G este centrul de greutate al patrulaterului MNPQ.

Demonstraţie cu ajutorul numerelor complexe.
Triunghiurile ABM, BCN, DP, DAQ fiind echilaterale, folosind consecinţa 3, avem:

$$\begin{aligned}m&=-a\varepsilon-b\varepsilon^2\\ n&=-b\varepsilon-c\varepsilon^2\\ p&=-c\varepsilon-d\varepsilon^2\\ q&=-d\varepsilon-a\varepsilon^2\end{aligned}$$

unde

$$\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$$

Adunînd aceste relaţii obţinem: m+n+p+q=a+b+c+d.
Din teorema 4 obţinem că patrulaterele MNPQ şi ABCD au acelaşi centru de greutate.

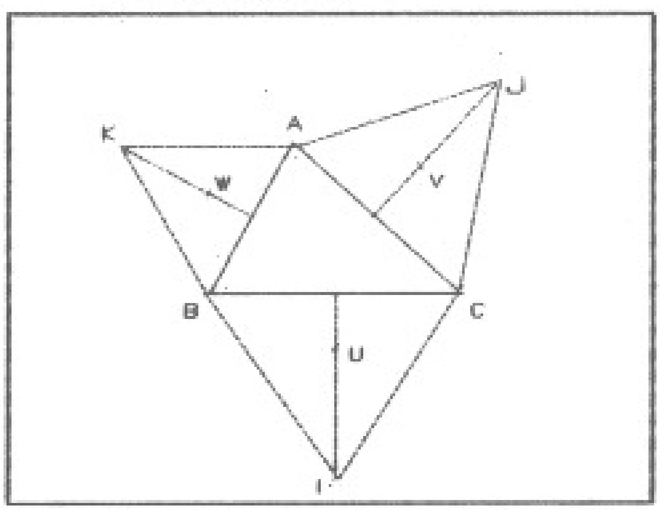
Observaţie. Să remarcăm simplitatea şi eleganţa acestei demonstraţii, în comparaţie cu cea vectorială care este mult mai laborioasă şi care necesită multă experienţă în conducerea calculului vectorial.

Aplicaţia 2 (Teorema Torricelli,[2]). Construim exterior (interior) trei triunghiuri echilaterale pe laturile unui triunghi ABC; fie I,J,K vîrfurile lor. Atunci:

a) Triunghiurile ABC, IJK au acelaşi centru de greutate G.

b) Centrele U,V,W ale triunghiurilor echilaterale formează un triunghi echilateral, de centru G.

Demonstraţie.



a) Avem

$$\begin{aligned}b+\varepsilon c+\varepsilon^2 i&=0\\ c+\varepsilon a+\varepsilon^2 j&=0\\ a+\varepsilon b+\varepsilon^2 k&=0\end{aligned}$$

Adunînd aceste relaţii obţinem a+b+c=i+j+k, deoarece

$$\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$$

b)
$$u+v+w=\frac{b+c+i}{3}+\frac{a+c+j}{3}+\frac{a+b+k}{3}=a+b+c,$$

deci triunghiul UVK are acelaşi centru de greutate ca şi ΔABC. Se arată că

$$\varepsilon^2 u+\varepsilon v+w=0,$$

deci ΔUVW este echilateral.

Rezultatele acestor aplicaţii şi a altora de acest gen pot fi generalizate.

5. Teoremă ([1], pag.70). *Dacă pe laturile poligonului* $A_1A_2\ldots A_n$, $n\geq 3$, *se construiesc în exterior (spre interior) triunghiurile asemenea* $\Delta A_1B_1A_2\sim\Delta A_2B_2A_3\sim\ldots\sim\Delta A_{n}B_{n}A_1$, *atunci poligoanele* $A_1A_2\ldots A_n$ *şi* $B_1B_2\ldots B_n$ *au acelaşi centru de greutate.*

Demonstraţie. Din asemănarea triunghiurilor avem

$$\frac{A_1B_1}{A_1A_2}=\frac{A_2B_2}{A_2A_3}=\ldots=\frac{A_nB_n}{A_nA_1}=r$$

$$m(\measuredangle B_1A_1A_2)=m(\measuredangle B_2A_2A_3)=\ldots=m(\measuredangle B_nA_nA_1)=\alpha$$

Fie

$$\varepsilon=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

Atunci:

$$b_k=a_k+\varepsilon(a_{k+1}-a_k),\ k=\overline{1,n},\quad cu\quad a_{n+1}=a_1$$

Deci

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)=\varepsilon\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=0,$$

adică cele două poligoane au acelaşi centru de greutate.

Observaţie. Concluziile aplicaţiilor 1) şi 2) rămîn adevărate dacă construim în exterior (interior) triunghiuri asemenea, la fel orientate (vîrfurile triunghiurilor sînt notate în acelaşi sens de rotaţie).

Aplicaţia 3. Fie ABC un triunghi dat. Se rotesc laturile AB, BC, CA cu acelaşi unghi (toate spre exterior sau spre interior) în jurul vîrfurilor A, B respectiv C şi se obţin poziţiile AB', BC', CA'. Să se demonstreze că ΔABC şi $\Delta A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate. ([3], pag.134)

Demonstrație. Triunghiurile ABB', BCC', CAA' sînt asemenea, deci sîntem în condițiile teoremei 5.

Aplicația 4. Fie $\triangle ABC$ iar M,N,P mijloacele laturilor AB, BC, CA. Pe mediatoarele segmentelor AB, BC, CA se consideră în interiorul triunghiului punctele C', A' respectiv B', astfel încît

$$\frac{MC'}{AB}=\frac{NA'}{BC}=\frac{PB'}{AC}$$

Să se demonstreze că triunghiurile ABC și A'B'C' au același centru de greutate. (Călin Ștefănescu, C.1152, G.M. 7/1991)

Demonstrație. Triunghiurile AC'B, BA'C, CB'A sînt isoscele și asemenea. Aplicăm teorema 5.

În încheiere propunem cîteva probleme susceptibile de a fi rezolvate prin metoda indicată.

1) Fie ACV, BAW, CBU, triunghiuri echilaterale construite spre exteriorul triunghiului oarecare ABC. Să se arate că centrele de greutate ale triunghiurilor VWA, WBU, UCV, CAV, BAW, CBU sînt vîrfurile unui hexagon regulat cu centrul în centrul de greutate al triunghiului ABC.

(I. Hadîrcă, 19745, G.M. 6/1983)

2). Unind mijloacele unui poligon convex cu **2n** vîrfuri, din două în două obținem două poligoane. Să se arate că centrele lor de greutate coincid.
(Pentru n=3 se obține problema adm. Lotul Olimpic 1984, G.M. 4/1985).

3). Laturile unui poligon convex $A_1A_2...A_n$, $n\geq 3$ se împart în același sens, de la A_1 spre A_2, de la A_2 spre A_3,..., de la A_n spre A_1 în același raport prin punctele de diviziune $B_1,B_2,...,B_n$. Să se arate că poligoanele $A_1A_2...A_n$ și $B_1,B_2...B_n$ au același centru de greutate.
(Pentru n=3 regăsim teorema lui Pappus, [3], pag.145)

4). Să se arate că pentru orice punct M de pe cercul circumscris triunghiului ABC, diferit de vîrfurile triunghiului, centrul de greutate al triunghiului format de centrele cercurilor lui Euler ale triunghiurilor MAB, MBC, MCA nu poate coincide cu centrul de greutate al triunghiului ABC.

B I B L I O G R A F I E

1. VULPESCU-JALEA, F.: O metodă unitară de rezolvare şi generalizare a unor probleme de geometrie, G.M. 3/1986.

2. MIHĂILESCU, N.: Utilizarea numerelor complexe în geometrie, Ed.tehnică, Bucureşti, 1968.

3. NICOLESCU, L.; BOSKOFF, V.: Probleme practice de geometrie, Ed.tehnică, Bucureşti, 1990.

4. VIRGILIUS, D.: Condiţia ca trei numere complexe să fie afixele vîrfurilor unui triunghi echilateral, Astra Matematică, vol.1, nr.2, 1990.

LICEUL "Gh. ŞINCAI"
BAIA MARE