Universitatea din Baia Mare
Lucrările Seminarului de creativitate matematică,
Vol.1(1991-1992), pag. 47-58

ASUPRA REZOLVĂRII UNOR ECUAŢII FUNCŢIONALE ÎN MULŢIMEA FUNCŢIILOR REALE CONTINUE

Maria S. POP şi Dana BOTORCE

În sensul cel mai larg, prin ecuaţie funcţională se înţelege o relaţie matematică în care apar una sau mai multe funcţii necunoscute care se cer a fi determinate. Acest mod de a defini o ecuaţie funcţională are neajunsul că înglobează prea multe tipuri de ecuaţii precum cele diferenţiale, cu derivate parţiale, integrale, integro-diferenţiale. De aceea, problema se restrînge uneori la determinarea unor mulţimi particulare de soluţii, cum ar fi de exemplu mulţimea funcţiilor mărginite, sau monotone, ori continue, sau derivabile, etc.

Prezentăm mai jos două tipuri remarcabile de ecuaţii funcţionale pentru care se cer soluţii în mulţimea $\mathbf{C}(\mathbb{R})$ a funcţiilor continue pe mulţimea numerelor reale: ecuaţia lui Cauchy (1821) şi ecuaţia $f\circ f=g$ în care g este o funcţie dată iar f este o funcţie necunoscută. Alegerea acestor tipuri este justificată atît de forma lor elegantă, cît şi de faptul că un număr mare de probleme apărute în ultimul timp în Gazeta matematică, alte reviste străine sau date la diferite concursuri, olimpiade sînt reductibile la ele.

Definiţie [4]: *Numim ecuaţie funcţională, o problemă de următorul tip:*

Dîndu-se două mulţimi de funcţii reale şi aplicaţiile $F,G:X\to Y$, să se determine în extensie (deci enumerînd obiectele ei), mulţimea S definită în abstracţie prin

$$S=\{f\in X/F(f)=G(f)\}$$

Vom nota simbolic o ecuaţie prin

$$F(f)=G(f);\ f\in X$$

Un element $f\in S$ se numeşte soluţie a ecuaţiei, iar mulţimea S, mulţimea soluţiilor ecuaţiei.

Problemele care se studiază în teoria ecuaţiilor funcţionale sînt următoarele:

1° determinarea efectivă a elementelor lui S sau explicitarea la maximum a mulţimii S;

2° în ce condiţii $S\neq\emptyset$ (deci teoreme de existenţă a soluţiilor ecuaţiei);

3° în ce condiţii $S=\{f\}$ (deci teoreme de existenţă şi unicitate);

4° în ce condiţii card $S\leq 1$ (teoreme de unicitate);

5° indicarea unor metode de aproximare a soluţiilor.

I. **Ecuaţia lui Cauchy.**

Să se determine $f\in C(\mathbb{R})$ astfel încît

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\quad \forall\ x,y\in\mathbb{R}\qquad (1)$$

Soluţie. Observăm mai întîi că pentru $y=0$ din (1) rezultă $f(0)=0$, iar pentru $y=-x$ deducem $f(-x)=-f(x)$, adică f este impară.

Întrucît $f(2)=f(1)+f(1)=2f(1)$, presupunînd $f(k)=kf(1)$ rezultă că $f(k+1)=f(k)+f(1)=kf(1)+f(1)=(k+1)f(1)$, ceea ce demonstrează că $f(n)=nf(1)$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Ţinînd seama de imparitatea lui f avem

$$f(x)=xf(1),\quad \forall\ x\in\mathbb{Z}$$

De asemenea, deoarece

$$f(1)=f(\underbrace{\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{n\ ori})=\underbrace{f(\frac{1}{n})+\ldots+f(\frac{1}{n})}_{n\ ori}=nf(\frac{1}{n}),$$

avem

$$f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n}f(1)\ \textit{pentru orice}\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Fie x raţional strict pozitiv, deci

$$x=\frac{m}{n}\quad \textit{unde}\ \ m,n\in\mathbb{N}^*$$

Prin inducţie se demonstrează că

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=mf\left(\frac{1}{n}\right)$$

de unde rezultă că

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}f(1),$$

şi prin urmare

$$f(x)=xf(1) \quad \forall\ x\in Q$$

Dacă $x_0\in\mathbb{R}\setminus Q$, atunci există şirul de numere raţionale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$; $x_n\in Q$, astfel încît $x_n\to x_0$.
Din continuitatea lui f în x_0 rezultă

$$f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)\overset{x_n\in Q}{=}\lim_{n\to\infty} x_nf(1)=x_0f(1)$$

Notînd $a=f(1)$ deducem mulţimea soluţiilor S ale ecuaţiei (1).

$$S=\{f/f(x)=ax;\ \forall\ x\in\mathbb{R};\ a\in\mathbb{R}\} \quad (2)$$

Observaţii: 1. În problema precedentă era suficient să se presupună continuitatea lui f în $x=0$, deoarece din ecuaţia (1) rezultă continuitatea lui f în orice x_0 real.

Într-adevăr, pentru orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $x_n\to x_0$, deoarece $x_n-x_0\to 0$, din continuitatea lui f în $x=0$ şi $f(0)=0$ rezultă

$$0=f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x_n-x_0)\overset{ec.1}{=}\lim_{n\to\infty} f(x_n)+$$
$$+f(-x_0)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)-f(x_0)$$

de unde

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$$

Cum şirul (x_n) este oarecare aceasta demonstrează că

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

deci f este continuă în x_0.

2. Funcţia f reprezintă un omomorfism al grupului aditiv al numerelor reale în el însuşi, adică problema poate fi reformulată astfel: "Găsiţi endomorfismele grupului aditiv al numerelor reale".

Prezentăm în continuare unele ecuaţii funcţionale reductibile la ecuaţia lui Cauchy:

a) Aflaţi funcţiile $f\in C(\mathbb{R})$ pentru care

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1 \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R} \qquad (3)$$

(G.M. nr.2-3/1982, problema 19134*)

Soluţie. Ecuaţia dată mai poate fi scrisă

$$f(x+y)-(x+y)^2-1=f(x)-x^2-1+f(y)-y^2-1$$

Fie funcţiile $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $h(x)=x^2+1$ şi $g(x)=f(x)-h(x)$. Cum $f,h\in C(\mathbb{R})$ rezultă că $g\in C(\mathbb{R})$ şi satisface ecuaţia (1) a lui Cauchy, adică, $g(x)=ax$, de unde

$$S=\{f/f(x)=x^2+ax+1,\ \ x\in\mathbb{R};a\in\mathbb{R}\}$$

b) Determinaţi $f\in C(\mathbb{R})$ astfel încît

$$f(x+y)=e^{x}f(y)+e^{y}f(x), \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R} \qquad (4)$$

(G.M. nr.4/1982, problema 19194*).

Soluţie. Împărţind ambii membri ai ecuaţiei (4) prin e^{x+y} obţinem

$$\frac{f(x+y)}{e^{x+y}}=\frac{f(x)}{e^{x}}+\frac{f(y)}{e^{y}}$$

ceea ce conduce la ecuaţia lui Cauchy pentru

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad g(x)=\frac{f(x)}{e^{x}}$$

şi mulţimea soluţiilor ei va fi

$$S=\{f/f(x)=axe^{x};\ \ x\in\mathbb{R};\ \ a\in\mathbb{R}\}$$

c) Găsiţi funcţiile $f\in C(\mathbb{R})$ pentru care

$$f(x+y)=f(x)f(y) \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R} \qquad (5)$$

Observație: Problema poate fi reformulată astfel:
Aflați morfismele grupului aditiv al numerelor reale în grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive.

Soluție: Deoarece

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)\geq 0, \text{ rezulta ca } f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$$

Pentru x=y=0 avem f(0)(f(0)-1)=0 adică sau f(0)=0, ceea ce implică

$$f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)=0 \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

sau f(0)=1. În acest caz

$$f(x)>0 \quad \forall\, x\in\mathbb{R}$$

și deci există $g=\log_b f$ unde $b\in(0,\infty)-\{1\}$. Întrucît logaritmînd în baza b ambii membrii ai ecuației (5) obținem

$$g(x+y)=g(x)+g(y),$$

cu soluțiile de forma

$$g(x)=ax;\quad x\in\mathbb{R};\quad a\in\mathbb{R},$$

deducem că

$$f(x)=b^{g(x)}=c^{x}$$

unde $c=b^a$ sau

$$S=\{f/f(x)=c^{x};\quad c\in(0,\infty)\}$$

d) Să se determine funcțiile $f\in C(\mathbb{R})$; f(1)=e+1 pentru care

$$f(x+y)=f(x)f(y)-xf(y)-yf(x)+xy+x+y \quad \forall\; x;y\in\mathbb{R} \qquad (6)$$

Soluție: Întrucît ecuația (6) se mai scrie sub forma

$$f(x+y)-(x+y)=(f(x)-x)(f(y)-y),$$

ea se reduce la ecuația (5) pentru g(x)=f(x)-x de unde

$$f(x)=x+c^x \quad \text{unde} \quad c\in(0,\infty)$$

Din $f(1)=e+1$ rezultă $c=e$, adică ecuația (6) are soluția unică

$$S=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=x+e^x\}$$

e) Determinați funcțiile $f\in C(\mathbb{R})$ cu proprietatea

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=e^a$$

pentru care avem

$$(x-a)(y-a)f(x+y)=(x+y-a)f(x)f(y) \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R} \qquad (7)$$

Soluție: Fie

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-a} & \neq a\\ e^a & x=a\end{cases}$$

Deoarece $g\in C(\mathbb{R})$, ecuația (7) devine $g(x)g(y)=g(x+y)$ cu soluția $g(x)=c^x$. Din $g(a)=e^a$ deducem că $c=e$ adică

$$S=\{f/f(x)=(x-a)e^x,\ x\in\mathbb{R}\}$$

f) Să se determine funcțiile continue $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R}$ care satisfac ecuația

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \qquad (8)$$

pentru orice $x,y\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ pentru care $1+xy\neq0$.

Soluție: Fie aplicația

$$g:/\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\quad g(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

Se verifică ușor că g este bijectivă și inversa sa este

$$g^{-1}:\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}\to\mathbb{R};\ g^{-1}(x)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

Totodată oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ există $u,v\in\mathbb{R}$ astfel încît $x=g(u)$ și $y=g(v)$ iar $1+g(u)g(v)=1+xy\neq0$.

Întrucît

$$u+v=g^{-1}(x)+g^{-1}(y)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}\right|$$

şi

$$g(u+v)=\frac{x+y}{1+xy},$$

ecuaţia (8) se poate scrie

$$(f\circ g)(u)+(f\circ g)(v)=(f\circ g)(u+v) \quad \forall\ u,v\in\mathbf{R}$$

Ţinînd cont că funcţia $f\circ g$ este continuă, rezolvarea ei revine la aceea a ecuaţiei lui Cauchy (1) cu soluţiile

$$(f\circ g)(u)=au \quad \forall\ u\in\mathbf{R},\ a\in\mathbf{R}$$

şi

$$f(x)=ag^{-1}(x)=\frac{a}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

adică

$$S=\{f/f(x)=\frac{a}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|;\quad a\in\mathbf{R};\quad (\forall)x\in\mathbf{R}\ \{-1,1\}\}$$

Indicăm cititorului ca exerciţiu să încerce construirea altor ecuaţii funcţionale reductibile la ecuaţia lui Cauchy.

II. În continuare ne vom opri asupra ecuaţiei funcţionale

$$f\circ f=g \qquad (9)$$

în care g este o funcţie reală dată iar f funcţia necunoscută. Spre deosebire de ecuaţia lui Cauchy nu se cunoaşte o condiţie necesară şi suficientă pe care trebuie să o satisfacă funcţia g, pentru ca ecuaţia (9) să aibă soluţii şi chiar dacă are soluţii lipseşte o metodă generală de rezolvare a ei. Totuşi, numărul mare de cazuri particulare ale acestei ecuaţii apărute în Gazeta Matematică şi la diferite concursuri, impune abordarea şi a acestui tip de ecuaţii, în cele ce urmează rezumîndu-ne doar la cîteva astfel de probleme.

1° Fie $a\in\mathbf{R}$ şi $n\in\mathbf{N}$. Demonstraţi că există funcţii continue $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ astfel încît

$$(f\circ f)(x)=ax^{n} \quad \forall\ x\in\mathbb{R} \qquad (10)$$

dacă şi numai dacă $a^n>0$.

Soluţie: Pentru a=0, funcţia identic nulă verifică condiţia din enunţ.

Distingem următoarele cazuri în funcţie de semnul lui a şi paritatea lui n:

1° pentru a>0 şi n par funcţia

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad f(x)=a^{\frac{1}{\sqrt{n}+1}}|x|^{\sqrt{n}}$$

este continuă şi verifică ecuaţia (9);

2° pentru a>0 şi n impar, funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$;

$$f(x)=\begin{cases} a^{\frac{1}{\sqrt{n}+1}}x^{\sqrt{n}}, & daca\ \ x\geq 0 \\ -a^{\frac{1}{\sqrt{n}+1}}(-x)^{\sqrt{n}}, & daca\ \ x<0 \end{cases}$$

continuă pe $\mathbb{R}$, verifică de asemenea ecuaţia (9) pentru orice x real;

3° pentru a<0 şi n par se verifică funcţiile $f\in C[\mathbb{R}]$

$$f(x)=-(-a)^{\frac{1}{\sqrt{n}+1}}|x|^{\sqrt{n}}$$

sînt soluţii ale ecuaţiei (9).

4° pentru a<0 şi n impar vom demonstra că mulţimea soluţiilor ecuaţiei (9) este mulţimea vidă.

Într-adevăr, dacă prin absurd există $f\in C[\mathbb{R}]$ astfel încît

$$(f\circ f)(x)=ax^{n},$$

cum $g(x)=ax^n$ e injectivă şi strict descrescătoare (a<0) rezultă că şi f e injectivă şi continuă, deci strict monotonă şi deci $f\circ f$ este strict crescătoare, adică g este strict crescătoare, ceea ce contrazice ipoteza.

Sintetizînd, $\exists f\in C[\mathbb{R}]$ astfel încît f e soluţie a ecuaţiei (9) dacă şi numai dacă $a^n\geq 0$.

Această problemă conduce firesc la următoarea întrebare: există $f\in C[\mathbb{R}]$ şi a<0 astfel încît

$$(f\circ f)(x)=ax^{2n+1} \quad (\forall)\ x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}\ ?$$

În [1] se dă un răspuns afirmativ acestei probleme în cazul particular $a=-1$.

Există $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încît

$$(f\circ f)(x)=-x^{2n+1}$$

dacă și numai dacă $n=0$.

2. Să se determine toate funcțiile derivabile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\in C^1[\mathbb{R}]$ care sînt soluții ale ecuației

$$f\circ f=f \qquad (11)$$

Soluție. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabilă pe $\mathbb{R}$, astfel încît $f\circ f=f$ și $I=\mathrm{Im}f$. Pentru orice $y\in I$ există $x\in\mathbb{R}$ astfel încît $f(x)=y$, adică

$$y=f(x)\overset{ec.(11)}{=}(f\circ f)(x)=f(y),\ \ deci\ \ f(y)=y\ \ (\forall)\ y\in I$$

Dacă intervalul I se reduce la un punct, atunci f e constantă pe $\mathbb{R}$. Dacă f nu e constantă deci $f'(x)\neq 0$, atunci fiind derivabilă, este continuă și deci intervalul I nu se reduce la un punct.
Fie $\alpha=\inf I$ deci $\alpha\le f(x)$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$ și $\beta=\sup I$ adică $\beta\ge f(x)$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$.
Din continuitatea lui f și faptul că pentru orice $x\in I$ avem $f(x)=x$ rezultă

$$f(\alpha)=\lim_{\substack{x\to\alpha\\ x>\alpha}} f(x)=\lim_{\substack{x\to\alpha\\ x>\alpha}} x=\alpha$$

Dar $\alpha\le f(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$ deci $f(\alpha)\le f(x)$ și α e punct de punct de minim al funcției f. Dacă α e interior lui $\mathbb{R}$ atunci $f'(\alpha)=0$ și cum din (11) și derivabilitate deducem că $f'(x)=1$ sau $f'(x)=0$ avem

$$0=f(\alpha)=\lim_{\substack{x\to\alpha\\ x>\alpha}} f(x)=\lim_{\substack{x\to\alpha\\ x>0}} 1=1$$

ceea ce este fals.
Contradicția provine de la faptul că α s-a presupus interior lui $\mathbb{R}$, deci $\alpha=-\infty$. Analog se demonstrează că $\beta=\infty$, deci $\mathrm{Im}f=(-\infty,\infty)$ și cum $f'(x)\in\{0,1\}$, singurele funcții $f\in C^1[\mathbb{R}]$ pentru care $f\circ f=f$ sînt funcțiile constante și funcția identică, $f(x)=x$.

Propunem cititorului studierea existenţei soluţiilor şi a altor ecuaţii de tipul (9) obţinute prin particularizarea funcţiei g. Pentru alte exemple ce se încadrează în acest tip indicăm lucrarea [1].

III. În încheiere prezentăm încă două ecuaţii funcţionale rezolvabile în mulţimea $\mathbf{C}(\mathbb{R})$, interesante prin punerea în evidenţă a unor modalităţi variate de rezolvare.

1° Determinaţi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuă în origine pentru care avem

$$f(x)-f(ax)=x \quad (\forall)\ x\in\mathbb{R};\quad a\in(0,1)\quad f(0)=a \qquad (12)$$

(Marcel Chiriţă [2]).

Soluţie: Ecuaţia (12) ne permite scrierea şirului de egalităţi

$$\begin{gathered} f(x)-f(ax)=x \\ f(ax)-f(a^2x)=ax \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(a^{n-1}x)-f(a^nx)=a^{n-1}x\ , \end{gathered}$$

care prin adunare membru cu membru ne dă:

$$f(x)-f(a^nx)=x(1+a+\dots+a^{n-1})=x\frac{a^n-1}{a-1}$$

Cum $a\in(0,1)$ avem

$$\lim_{n\to\infty} a^n=0,$$

trecînd la limită în această egalitate şi ţinînd seama de continuitatea lui f în origine avem

$$\lim_{n\to\infty}(a^nx)=f(0)=a,$$

de unde

$$f(x)-a=\frac{x}{1-a}$$

adică

$$S=\{f/f(x)=a+\frac{x}{1-a};\quad a\in(0,1);\quad \forall\ x\in\mathbb{R}\}$$

2°[2] Determinaţi funcţiile continue $f:[1,\infty)\to\mathbf{N}$ astfel încît

$$\int_{n}^{x^n} f(t)\,dt=\int_{1}^{n}(t^{n-1}+t^{n-2}\ldots+t)f(t)\,dt \quad (\forall)\ x\in[1,\infty);\ \ n\in\mathbf{N};\ n\geq 2\ fixat \qquad (13)$$

Problema reprezintă o generalizare a unei probleme propuse la Olimpiada de matematică, faza finală, în 1979 de către Panaitopol L.

Soluţie: Derivînd ecuaţia (13) membru cu membru obţinem

$$nx^{n-1}f(x^n)-f(x)=(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x)f(x)$$

sau

$$nx^{n-1}f(x^n)=\frac{x^n-1}{x-1}f(x) \quad pentru\ \ x\in(1,\infty) \qquad (14)$$

Fie funcţia $g:[1,\infty)\to\mathbf{R}$

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x\ln x}{x-1}f(x), & pentru\ \ x\in(1,\infty)\\ f(1) & pentru\ \ x=1\end{cases}$$

Deoarece

$$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}\cdot f(1)=f(1),$$

g este continuă pe $[1,\infty)$.

Mai mult din relaţia (14) deducem că $g(x^n)=g(x)$ pentru orice $x\in(1,\infty)$, de unde

$$g(x)=g(x^{\frac{1}{n}})=g(x^{\frac{1}{n^2}})=\ldots=g(x^{\frac{1}{n^k}})$$

oriçare ar fi $k\in\mathbf{N}$; $k\geq 2$. Trecînd la limită cînd $k\to\infty$ avem

$$g(x)=\lim_{k\to\infty} g(x^{\frac{1}{n^k}})=g(\lim_{k\to\infty} x^{\frac{1}{n^k}})=g(1)=f(1)$$

pentru orice $x\in[1,\infty)$, de unde notînd $a=f(1)$, deducem

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(x-1)}{x\ln x} & x\in(1,\infty)\\ a & x=1 \quad a\in\mathbf{R}\end{cases}$$

BIBLIOGRAFIE

1. BĂTINEȚU-GIURGIU, D.M., VULPESCU-JALEA F.: Ecuații și inecuații funcționale, Buletin matematic în sprijinul pregătirii concursurilor școlare, Tîrgoviște 1987, pag.133-164.

2. CHIRIȚĂ, M.: Ecuații funcționale, Buletin Matematic în sprijinul pregătirii concursurilor școlare, Arad 1986, pag.82-89.

3. RIZESCU, G., RIZESCU, E.: Teme pentru cercurile de matematică din licee, pag.234-235, Editura Didactică și Pedagogică, 1977.

4. RUS, A., COMAN, Gh., PAVEL, G., RUS, I.: Introducere în teoria ecuațiilor operatoriale, Dacia 1976.

UNIVERSITATEA DIN BAIA MARE
FACULTATEA DE LITERE ȘI ȘTIINȚE

Liceul "VASILE LUCACIU"
BAIA MARE