Universitatea din Baia Mare
Lucrările Seminarului de creativitate matematică,
vol.1(1991-1992), pag. 59-63

ASUPRA UNOR ŞIRURI RECURENTE

Dan BĂRBOSU

Rezumat: Scopul acestei note este de a prezenta condiţii necesare şi suficiente pentru convergenţa unui şir $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ definit printr-o relaţie de recurenţă liniară de ordinul doi, cu coeficienţi variabili.

Fie $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ două şiruri date de numere reale. Definim şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ prin relaţia de recurenţă:

$$b_n x_{n+1}-(a_n+b_n)x_n+a_n x_{n-1}=0, \qquad (\forall)n\in\mathbf{N}^*$$

x_0, $x_1\in\mathbf{R}$ fiind daţi. Dacă $a_n=a$, $b_n=b$, $(\forall)n\in\mathbf{N}^*$, atunci şirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ce verifică (1) este un şir liniar recurent de ordin doi cu coeficienţi constanţi. În acest caz termenul său general poate fi exprimat explicit, în funcţie de a, b, x_0, x_1 şi n iar studiul convergenţei lui nu implică probleme deosebite [4].

Presupunem în continuare şirurile $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ neconstante. În aceste condiţii termenul general al şirului $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ nu poate fi întotdeauna exprimat explicit.
Privitor la convergenţa lui, enunţăm şi demonstrăm următoarea:

Propoziţie [1]: *Dacă $(a_n)_{n\ge 0}$, $(b_n)_{n\ge 0}$, sînt două şiruri de numere reale cu toţi termenii nenuli, atunci şirul $(x_n)_{n\ge 0}$ definit prin relaţia (1) este convergent dacă şi numai dacă seria*

$$\sum_{n\ge 1}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right)$$

este convergentă.

Demonstraţie: Fie $(s_n)_{n\geq 1}$ şirul sumelor parţiale al seriei

$$\sum_{n\geq 1}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right)$$

iar

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{a_i}{b_i}\right)$$

termenul ei general.

Din relaţia de recurenţă a şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se obţine imediat:

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n_n}-x_{n-1}}=\frac{a_n}{b_n}\Rightarrow x_{k+1}-x_k=(x_1-x_0)\prod_{i=1}^{k}\frac{a_i}{b_i},\qquad (\forall)\, k=\overline{s,n}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)=(x_1-x_0)\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{a_i}{b_i}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_{n+1}=x_0+(x_1-x_0)\,s_n \qquad (2)$$

Relaţia (2) arată că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă şi numai dacă şirul $(s_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi afirmaţia enunţului este demonstrată.

Consecinţa 1: *Fie* $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ *două şiruri de numere reale nenule iar* $(x_n)_{n\geq 0}$ *definit prin relaţiile:*

$$(3)\qquad b_n x_n x_{n-1}-(a_n+b_n)\,x_{n-1}x_{n+1}+a_n x_n x_{n+1}=0,\qquad (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*,\ (x_0,x_1\in\mathbb{R}^*)$$

Sînt adevărate afirmaţiile:

i) şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent şi*

$$\lim_{n\to\infty} x_n\neq 0$$

dacă şi numai dacă seria

$$\sum_{n\geq 1}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right)$$

este convergentă.

ii) şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent şi*

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0$$

dacă şi numai dacă seria

$$\sum_{n\geq 1}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right)$$

este divergentă.

Demonstrație: Șirul $(y_n)_{n\geq 0}$, de termen general

$$y_n=\frac{1}{x_n}$$

verifică relația (1) și se aplică propoziția.

Consecința 2: *Fie* $(a_n)_{n\geq 0}$ *două șiruri de numere reale nenule, iar* $(x_n)_{n\geq 0}$ *definit prin relațiile:*

$$(4)\qquad x_{n+1}^{b_n}\,x_{n-1}^{a_n}=x_n^{a_n+b_n},\qquad (\forall)\,n\in\mathbb{N}^*\ (x_0,x_1\in\mathbb{R}_+^*)$$

Sînt adevărate afirmațiile:

i) șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent și*

$$\lim_{n\to\infty} x_n\neq 0$$

dacă și numai dacă seria

$$\sum_{n\geq 1}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right)$$

este convergentă.

ii) dacă $x_1>x_0$, *șirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent și*

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0$$

dacă și numai dacă seria

$$\sum_{n\geq 1}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right)$$

diverge la $-\infty$.

iii) dacă $x_1<x_0$, *șirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent și*

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0$$

dacă și numai dacă seria

$$\sum_{n\geq 1}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right)$$

diverge la $+\infty$.

Demonstraţie: Şirul $(y_n)_{n\geq 0}$ de termen general $y_n=\ln x_n$ verifică relaţia (1) şi se aplică propoziţia.

Prezentăm în continuare cîteva aplicaţii ale rezultatelor precedente.

Aplicaţia 1[]: *Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relaţiile*

$$x_0=0,\ x_1=1,\ (n+1)x_{n+1}-(n+x+1)x_n+x\cdot x_{n-1}=0,\quad x\in\mathbb{R}^*$$

este convergent şi să se găsească limita lui.

Soluţie: Se pune $b_n=n+1$, $a_n=x$. Seria

$$\sum_{n\geq 1}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{x}{i+1}\right)$$

este convergentă şi are suma

$$\frac{e^x-1}{x}$$

Conform propoziţiei, şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{e^x-1}{x}$$

Aplicaţia 2: *Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin relaţiile*

$$x_0=1,\ x_1=2,\ a\cdot x_n x_{n+1}-(a+n)x_{n+1}x_{n-1}+n\cdot x_n x_{n-1}=0$$
$$(\forall)\, n\in\mathbb{N}^*,\ (a\in\mathbb{R}^*),\ n\geq 2$$

este convergent şi să se găsească limita lui.

Soluţie: Se pune $b_n=n$, $a_n=a$. Seria

$$\sum_{n\geq 1}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{a}{i}\right)$$

este convergentă şi are suma e^a-1. Conform consecinţei 1 şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{e^a}$$

Aplicaţia 3: *Să se arate că şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *definit prin relaţiile*

$$x_0=1,\ x_1=2,\ x_n^{2n(2n-1)-a}=x_n^{2n(2n-1)}x_{n-1}^{-a},\quad (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq 2$$

este convergent şi să se găsească limita lui.

Soluţie: Se pune $b_n=2n(2n-1)$, $a_n=a$. Seria

$$\sum_{n\geq 1}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{a}{2i(i-1)}\right)$$

este convergentă şi are suma cosa−1.

Aplicînd consecinţa 3, şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent şi

$$\lim_{n\to\infty} x_n=e^{\cos a}$$

BIBLIOGRAFIE

1. *.*: Problemă dată la examenul pentru obţinerea gradului II, sesiunea septembrie 1988.

2. BĂRBOSU, Dan: Asupra unor recurenţe, lucrare prezentată la sesiunea de referate şi comunicări a profesorilor, Satu Mare, noiembrie 1988.

3. BĂRBOSU, Dan: Asupra unor şiruri recurente (va apărea în revista ASTRA MATEMATICĂ).

4. BĂTINEŢU, D.M.: Şiruri, ed.ALBATROS, 1979, pag.506–510.

5. BENCZE M.: Problema 21.026*, G.M.B. nr.2/1987.

UNIVERSITATEA DIN BAIA MARE
FACULTATEA DE LITERE ŞI ŞTIINŢE