Universitatea din Baia Mare
Lucrările Seminarului de creativitate matematică,
Vol.1(1991-1992), pag. 65-69

INEGALITĂŢI DE TIP TRIUNGHI

Gabriella KOVÁCS

Folosind notaţiile obişnuite referitoare la elementele unui triunghi ABC, prezentăm o metodă pentru a deduce inegalităţi de forma

$$E(A,B,C)<E(B,C,A)+E(C,A,B),$$

numite inegalităţi de tip triunghi, frecvente în culegerile de probleme destinate elevilor.

Asemenea inegalităţi, chiar dacă algebric sînt echivalente între ele, pot fi interesante prin semnificaţia lor geometrică sau trigonometrică.

A. *În orice triunghi ABC are loc $a<b+c$ (inegalitatea triunghiului) şi în consecinţă $ta<tb+tc$, $\forall t>0$.*

Particularizînd

$$t=(2S)^k=(ah_a)^k=(bh_b)^k=(ch_c)^k,\quad k\in\mathbb{R}$$

obţinem

$$(1)\quad a^{k+1}h_a^k<b^{k+1}h_b^k+c^{k+1}h_c^k,\quad \forall\, k\in\mathbb{R}$$

$$k=-1:\quad \frac{1}{h_a}<\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$$

$$k=-\frac{1}{2}:\quad \sqrt{\frac{a}{h_a}}<\sqrt{\frac{b}{h_b}}+\sqrt{\frac{c}{h_c}}$$

$$k=-\frac{1}{3}:\quad \sqrt[3]{\frac{a^2}{h_a}}<\sqrt[3]{\frac{b^2}{h_b}}+\sqrt[3]{\frac{c^2}{h_c}}$$

$$k=-\frac{2}{3}:\quad \sqrt[3]{\frac{a}{h_a^2}}<\sqrt[3]{\frac{b}{h_b^2}}+\sqrt[3]{\frac{c}{h_c^2}}$$

pentru

$$t=(2S)^k=(ab\ \sin C)^k=(bc\ \sin A)^k=(ca\ \sin B)^k,\quad k\in\mathbb{R}$$

obţinem

$$(2)\quad a^{k+1}b^k\sin^k C<b^{k+1}c^k\sin^k A+c^{k+1}a^k\sin^k B,\quad \forall k\in\mathbb{R}$$

$$k=-1:\quad \frac{1}{b\ \sin C}<\frac{1}{c\ \sin A}+\frac{1}{a\ \sin B}$$

$$k=-\frac{1}{2}:\quad \sqrt{\frac{a}{b\ \sin C}}<\sqrt{\frac{b}{c\ \sin A}}+\sqrt{\frac{c}{a\ \sin B}}$$

$$k=-\frac{1}{3}:\quad \sqrt[3]{\frac{a^2}{b\ \sin C}}<\sqrt[3]{\frac{b^2}{c\ \sin A}}+\sqrt[3]{\frac{c^2}{a\ \sin B}}$$

$$k=-\frac{2}{3}:\quad \sqrt[3]{\frac{a}{b^2\ \sin^2 C}}<\sqrt[3]{\frac{b}{c^2\ \sin^2 A}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a^2\ \sin^2 B}}$$

Prin particularizarea

$$t=(2R)^k=\left(\frac{a}{\sin A}\right)^k=\left(\frac{b}{\sin B}\right)^k=\left(\frac{c}{\sin C}\right)^k,\quad k\in\mathbb{R}$$

găsim

$$(3)\quad \frac{a^{k+1}}{\sin^k A}<\frac{b^{k+1}}{\sin^k B}+\frac{c^{k+1}}{\sin^k C},\quad \forall k\in\mathbb{R}$$

$$k=-1:\quad \sin A<\sin B+\sin C$$

$$k=-\frac{1}{2}:\quad \sqrt{a\ \sin A}<\sqrt{b\ \sin B}+\sqrt{c\ \sin C}$$

$$k=-\frac{1}{3}:\quad \sqrt[3]{a^2\sin A}<\sqrt[3]{b^2\ \sin B}+\sqrt[3]{c^2\ \sin C}$$

$$k=-\frac{2}{3}:\quad \sqrt[3]{a\ \sin^2 A}<\sqrt[3]{b\ \sin^2 B}+\sqrt[3]{c\ \sin^2 C}$$

Pentru $t=(abc)^k$, $k\in\mathbb{R}$, găsim

$$(4)\quad a^{k+1}b^kc^k<a^kb^{k+1}c^k+a^kb^kc^{k+1},\quad \forall\ k\in\mathbb{R}$$

Pentru

$$t=(2S)^k(2R)^l=(ah_a)^k\left(\frac{a}{\sin A}\right)^l=(bh_b)^k\left(\frac{b}{\sin B}\right)^l=(ch_c)^k\left(\frac{c}{\sin C}\right)^l,\quad k,l\in\mathbb{R}$$

obţinem

$$(5)\qquad \frac{a^{k+l+1}h_a^k}{\sin^l A}<\frac{b^{k+l+1}h_b^k}{\sin^l B}+\frac{c^{k+l+1}h_c^k}{\sin^l C},\quad \forall\ k,l\in\mathbb{R}$$

$$k=-\frac{1}{2},\ l=-\frac{1}{2}:\quad \sqrt{\frac{\sin A}{h_a}}<\sqrt{\frac{\sin B}{h_b}}+\sqrt{\frac{\sin C}{h_c}}$$

$$k=-\frac{2}{3},\ l=-\frac{1}{3}:\quad \sqrt[3]{\frac{\sin A}{h_a^2}}<\sqrt[3]{\frac{\sin B}{h_b^2}}+\sqrt[3]{\frac{\sin C}{h_c^2}}$$

Lăsăm pe seama cititorului alte particularizări ale lui t.

Consecința 1. *În orice triunghi au loc următoarele inegalități duble:*

$$\left|\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right|<\frac{1}{h_a}<\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$$

$$\left|\sqrt{\frac{b}{h_b}}-\sqrt{\frac{c}{h_c}}\right|<\sqrt{\frac{a}{h_a}}<\sqrt{\frac{b}{h_b}}+\sqrt{\frac{c}{h_c}}$$

....

$$|\sin B-\sin C|<\sin A<\sin B+\sin C$$

$$|\sqrt{b}\sin B-\sqrt{c}\sin C|<\sqrt{a}\sin A<\sqrt{b}\sin B+\sqrt{c}\sin C$$

....

$$\left|\sqrt{\frac{\sin B}{h_b}}-\sqrt{\frac{\sin C}{h_c}}\right|<\sqrt{\frac{\sin A}{h_a}}<\sqrt{\frac{\sin B}{h_b}}+\sqrt{\frac{\sin C}{h_c}},\ etc.$$

Consecința 2. *Cu următoarele segmente se poate construi un triunghi:*

$$\frac{1}{h_a},\ \frac{1}{h_b},\ \frac{1}{h_c}$$

$$\sqrt{\frac{a}{h_a}},\ \sqrt{\frac{b}{h_b}},\ \sqrt{\frac{c}{h_c}}$$

....

$$\sin A,\ \sin B,\ \sin C$$

$$\sqrt{a}\sin A,\ \sqrt{b}\sin B,\ \sqrt{c}\sin C$$

....

$$\sqrt{\frac{\sin A}{h_a}},\ \sqrt{\frac{\sin B}{h_b}},\ \sqrt{\frac{\sin C}{h_c}}\ ,\ etc.$$

(Aceste triunghiuri sînt asemenea cu triunghiul ABC).

B. *Fixăm un triunghi ABC cu unghiul A ascuțit. Din* $\cos A>0$ *și* $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ *(teorema cosinus) rezultă că* $a^2<b^2+c^2$ *și în consecință* $ta^2<tb^2+tc^2$, $\forall\ t>0$.

Particularizînd

$$t=(2S)^k=(ah_a)^k(bh_b)^k(ch_c)^k,\quad k\in\mathbb{R}$$

obținem

$$(6)\quad a^{k+2}h_a^k<b^{k+2}h_b^k+c^{k+2}h_c^k,\quad \forall\, k\in\mathbb{R}$$

$$k=-2:\quad \frac{1}{h_a^2}<\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}$$

$$k=-1:\quad \frac{a}{h_a}<\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}$$

$$k=-\frac{1}{2}:\quad a\sqrt{\frac{a}{h_a}}<b\sqrt{\frac{b}{h_b}}+c\sqrt{\frac{c}{h_c}}$$

$$k=-\frac{2}{3}:\quad a\sqrt[3]{\frac{a}{h_a^2}}<b\sqrt[3]{\frac{b}{h_b^2}}+c\sqrt[3]{\frac{c}{h_c^2}}$$

Pentru

$$t=(2R)^k=\left(\frac{a}{\sin A}\right)^k=\left(\frac{b}{\sin B}\right)^k=\left(\frac{c}{\sin C}\right)^k,\quad k\in\mathbb{R},$$

obţinem

$$(7)\quad \frac{a^{k+2}}{\sin^k A}<\frac{b^{k+2}}{\sin^k B}+\frac{c^{k+2}}{\sin^k C},\quad \forall\, k\in\mathbb{R}$$

$$k=-2:\quad \sin^2 A<\sin^2 B+\sin^2 C$$

$$k=-1:\quad a\sin A<b\sin B+c\sin C$$

$$k=-\frac{1}{2}:\quad a\sqrt{a\sin A}<b\sqrt{b\sin B}+c\sqrt{c\sin C}$$

$$k=-\frac{2}{3}:\quad a\sqrt[3]{a\sin^2 A}<b\sqrt[3]{b\sin^2 B}+c\sqrt[3]{c\sin^2 C}$$

Pentru $t=(abc)^k$, $k\in\mathbb{R}$, obţinem

$$(8)\quad a^{k+2}b^kc^k<a^kb^{k+2}c^k+a^kb^kc^{k+2},\quad \forall\, k\in\mathbb{R}$$

Pentru

$$t=(2S)^k(2R)^l=(ah_a)^k\left(\frac{a}{\sin A}\right)^l=(bh_b)^k\left(\frac{b}{\sin B}\right)^l=(ch_c)^k\left(\frac{c}{\sin C}\right)^l,\quad k,l\in\mathbb{R}$$

obţinem

$$(9)\quad a^{k+l+2}\frac{h_a^k}{\sin^l A}<b^{k+l+2}\frac{h_b^k}{\sin^l B}+c^{k+l+2}\frac{h_c^k}{\sin^l C},\quad \forall\, k,l\in\mathbb{R}$$

$$k=-1,\ l=-1:\quad \frac{\sin A}{h_a}<\frac{\sin B}{h_b}+\frac{\sin C}{h_c}$$

Rugăm cititorul să încerce alte particularizări ale variabilei t.

Observaţii.

Din teorema cosinus rezultă că dacă una din relaţiile de sub (6), (7), (8) sau (9) are loc, atunci unghiul A al triunghiului

ABC este ascuţit.

Schimbînd sensul inegalităţilor obţinem caracterizări pentru unghi A obtuz.

Înlocuind relaţia de inegalitate prin egalitate, obţinem caracterizări pentru unghi A drept.

Consecinţa 1. *În orice triunghi ascuţitunghic au loc inegalităţile duble*

$$\left|\frac{1}{h_b^2}-\frac{1}{h_c^2}\right|<\frac{1}{h_a^2}<\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}$$
$$\left|\frac{b}{h_b}-\frac{c}{h_c}\right|<\frac{a}{h_a}<\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|\sin^2 B-\sin^2 C|<\sin^2 A<\sin^2 B+\sin^2 C$$
$$|b\sin B-c\sin C|<a\sin A<b\sin B+c\sin C$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left|\frac{\sin B}{h_b}-\frac{\sin C}{h_c}\right|<\frac{\sin A}{h_a}<\frac{\sin B}{h_b}+\frac{\sin C}{h_c},\quad etc.$$

Consecinţa 2. *Dacă triunghiul ABC este ascuţitunghic, atunci cu următoarele segmente se poate construi un triunghi.*

$$a^2,\ b^2,\ c^2$$
$$\frac{1}{h_a},\ \frac{1}{h_b},\ \frac{1}{h_c}$$
$$\frac{a}{h_a},\ \frac{b}{h_b},\ \frac{c}{h_c}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\sin^2 A,\ \sin^2 B,\ \sin^2 C$$
$$a\sin A,\ b\sin B,\ c\sin C$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\sin A}{h_a},\ \frac{\sin B}{h_b},\ \frac{\sin C}{h_c},$$

(Aceste triunghiuri sînt asemenea două cîte două).

În final propunem cititorului să aplice metoda prezentată la cazul unui tetraedru.