Universitatea din Baia Mare
Lucrările Seminarului de ceativitate matematică,
vol.1(1991-1992), pag. 71-80

ASUPRA UNOR ECUAŢII FUNCŢIONALE

Dan BĂRBOSU

Rezumat. Se vor prezenta cîteva tipuri de ecuaţii funcţionale ce generalizează o serie de probleme propuse la concursurile de matematică pentru elevi şi respectiv probleme publicate în G.M.B.

Este cunoscut faptul că majoritatea fenomenelor studiate de diversele ştiinţe ale naturii sînt descrise şi modelate matematic cu ajutorul ecuaţiilor funcţionale. Cunoaşterea acestor fenomene este determinată de cunoaşterea soluţiilor ecuaţiilor funcţionale care le modelează. Din acest motiv problema rezolvării ecuaţiilor funcţionale a fost dintotdeauna una dintre problemele centrale ale matematicii.

Mulţimea în care se caută soluţiile unei ecuaţii funcţionale şi proprietăţile speciale ale funcţiilor ce intervin în ecuaţie determină o multitudine de tipuri de ecuaţii funcţionale.

În această notă ne vom ocupa de rezolvarea unor tipuri de ecuaţii funcţionale cu o singură funcţie necunoscută, presupusă continuă pe un interval $\mathbf{I}\subset\mathbf{R}$.

Ne ocupăm în primul rînd de rezolvarea unor ecuaţii funcţionale de forma:

$$(1)\quad f(g(x)=f(x),\ (\forall)x\in\mathbf{I}$$

în care funcţia necunoscută este f iar $g:\mathbf{I}\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ este o funcţie dată.

Privitor la ecuaţia (1), în lucrarea [12] se demonstrează:

Propoziţia 1: Fie $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o contracţie sau dilataţie. Atunci unica soluţie a ecuaţiei funcţionale (1) este funcţia constantă $f(x)=f(x^*)$, unde x^* este unicul punct fix a lui g.

Demonstrația propoziției 1 face apel la binecunoscuta teoremă de punct fix a lui Banach (vezi de exemplu [4]).

Menționăm în continuare cîteva aplicații ale propoziției 1:

Aplicația 1 [15]: Determinați funcțiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$f(x)=f\left(\frac{x+1}{2}\right),\ (\forall)\,x\in\mathbb{R}$$

Aplicația 2.[12]: Determinați funcțiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$\frac{1}{1+x^2}f(\arctan x)=f(x),\quad (\forall)\,x\in\mathbb{R}$$

Aplicația 3 [8]: Fie :

$$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},$$

astfel încît

$$f(2^x)=f(3^x),\quad (\forall)\,x\in\mathbb{R}$$

Demonstrați că f este constantă.

În continuare vom rezolva o ecuație funcțională reductibilă la o ecuație funcțională de forma (1).

Propoziția 2: Soluțiile continue ale ecuației funcționale

$$(2)\quad f(x)=xf(x^2),\quad (\forall)\,x\in[1,+\infty)$$

sînt funcțiile

$$f_a:[1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f_a(x)=\frac{a}{x}\quad \text{unde}\quad a=f(1).$$

Demonstrație: Fie

$$g:[1,+\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=x\cdot f(x),\quad (\forall)\,x\in[1,+\infty).$$

Atunci:

$$g(x^2)=x^2\cdot f(x^2)=x\cdot x\cdot f(x^2)=x\cdot f(x)=g(x),\quad (\forall)\,x\in[1,+\infty)$$

E clar că funcția

$$h:[1,+\infty)\to\mathbb{R},\ h(x)=x^2$$

este o dilatație sujectivă, avînd unicul punct fix x=1.

Conform propoziţiei 1 se obţine:

$$g(x)=g[h(1)]=g(1)=1\cdot f(1)=f(1),\ (\forall)x\in[1,+\infty)$$

şi din cele de mai sus rezultă că

$$f_a(x)=\frac{f(1)}{x}=\frac{a}{x}$$

Observaţie: Fără a intra în detalii de demonstraţie, menţionăm că ipoteza propoziţiei 2 poate fi slăbită în sensul că e suficient să se ceară continuitatea funcţiei necunoscute f într-un singur punct al domeniului de definiţie (de exemplu în x=1), de aici rezultînd continuitatea ei pe întreg domeniul de definiţie. Această observaţie a fost făcută de colegul lector universitar Vasile BERINDE.

Utilitatea propoziţiei 2 o exemplificăm prin:

Aplicaţia 4[1]: Să se determine funcţiile continue

$$f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$$

ce verifică egalitatea:

$$\int_1^x f(t)\,dt=\int_{x^k}^{x^{k+1}} f(t)\,dt,\ (\forall)x\in[1,+\infty),\ (\forall)k\in\mathbb{N}^*$$

Soluţie: Pentru k=1 ecuaţia enunţului devine:

$$\int_1^x f(t)\,dt=\int_x^{x^2} f(t)\,dt,\ (\forall)x\in[1,+\infty)$$

Derivînd membru cu membru ecuaţia precedentă sîntem conduşi la ecuaţia (2). Conform propoziţiei 2, unicele soluţii ale acestei ecuaţii sînt funcţiile

$$f:[1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{a}{x}$$

E uşor de verificat că aceste funcţii satisfac ecuaţia enunţului. Prin urmare, unicele soluţii ale ecuaţiei considerate sînt funcţiile:

$$f:[1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{a}{x}$$

Similar cu rezolvarea problemei din aplicaţia 4 se rezolvă şi problema din:

Aplicaţia 5[9]: Să se determine funcţiile continue

$$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$$

pentru care

$$\int_x^{x^k} f(t)\,dt=(k-1)\int_1^x f(t)\,dt,\quad (\forall)\, x>0$$

unde $k\geq 2$ este un număr natural dat.

O generalizare a ecuaţiei funcţionale (1) o constituie ecuaţia funcţională:

$$(3)\quad f(x)=f[g(x)]+h(x),\quad (\forall)\, x\in I\subseteq\mathbb{R}$$

în care funcţia necunoscută este $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, funcţiile $g:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ respectiv $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fiind date. Fără a aborda cazul general, prezentăm:

Aplicaţia 6[6]: Determinaţi funcţiile continue $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$f(\log_2 x)-f(\log_3 x)=\log_5 x,\quad (\forall)\, x\in(0,+\infty)$$

Soluţie: Notînd $y=\log_2 x$, $a=\log_3 2$, $b=\log_5 2$, ecuaţia enunţului se transformă în ecuaţia:

$$(3')\quad f(y)=f(ay)+by,\quad (\forall)\, y\in\mathbb{R}$$

deci într-o ecuaţie de forma (3). Ecuaţia (3') se rezolvă fără nici o dificultate, conducînd la soluţia ecuaţiei enunţului exprimată sub forma:

$$f(x)=\frac{\log_5 2}{1-\log_3 2}x+f(0)$$

unde $f(0)$ este un număr real oarecare.

Din clasa ecuaţiilor funcţionale de forma (3) menţionăm şi:

Aplicaţia 7[14]: Să se determine funcţiile continue $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ cu proprietatea că:

$$f(x)+f(x^2)=x+x^2,\ (\forall)x\in\mathbb{R}_+$$

În continuare vom aplica o binecunoscută proprietate de nenegativitate a integralei în rezolvarea unor ecuații funcționale (vezi de exemplu [7]). Pentru început, enunțăm și demonstrăm:

Propoziția 3: Fie a,b,c,d $\in\mathbb{R}$, a<b, c<d. Dacă:
i) $g,h:[a,b]\to[c,d]$ sînt continue pe [a,b]
ii) $g(a+b-x)=h(x)$, $(\forall)x\in[a,b]$
atunci funcția continuă $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ care satisface ecuația funcțională:

$$(4)\quad \int_a^b f[g(x)\cdot h(x)\,dx=\int_a^b f^2(h(x))+\frac{1}{4}\int_a^b g^2(x)\,dx$$

satisface și ecuația funcțională:

$$(5)\quad f(h(x))=\frac{1}{2}g(x,\ (\forall)x\in[a,b]$$

Demonstrație:
Notăm:

$$I=\int_a^b f[g(x)]\cdot h(x)\,dx$$

și făcînd schimbarea de variabilă t=a+b-x, obținem:

$$I=-\int_b^a h(a+b-t)\,f[g(a+b-t)]\,dt=$$
$$=\int_a^b h(a+b-x)\,f[g(a+b-x)]\,dx=$$
$$=\int_a^b g(x)\,f(h(x))\,dx$$

Cu această observație ecuația funcțională (4) devine:

$$\int_a^b g(x)\cdot f(h(x))\,dx=$$
$$=\int_a^b f^2(h(x))\,dx+\frac{1}{4}\int_a^b g^2(x)\,dx\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\int_a^b \left(f(h(x))-\frac{1}{2}g(x)\right)^2 dx=0$$

Întrucît

$$(f(h(x)-\frac{1}{2}g(x))^2\geq 0 \quad (\forall)\,x\in[a,b]$$

din egalitatea precedentă deducem că

$$f(h(x))=\frac{1}{2}g(x), \quad (\forall)\,x\in[a,b]$$

Observaţie: În [3] am demonstrat că în ipotezele propoziţiei 3, ecuaţiile (4) şi (5) sînt echivalente.

Prezentăm cîteva aplicaţii ale propoziţiei 3.

Aplicaţia 8[10]: Să se determine funcţiile continue $f:[0,1]\rightarrow\mathbb{R}$ ce satisfac egalitatea:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, f(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{16}+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(\cos x)\,dx$$

Soluţie: Funcţiile

$$g,h:[0,\frac{\pi}{2}]\rightarrow[0,1] \quad g(x)=\sin x,\ h(x)=\cos x$$

satisfac condiţiile propoziţiei 3. În plus,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{g^2x)}{4}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{4}\,dx=\frac{\pi}{16}$$

Conform propoziţiei 3, obţinem

$$f(\cos x)=\frac{\sin x}{2}, \quad (\forall)\,x\in[0,\frac{\pi}{2}].$$

Notînd

$$t=cosx,\ (\forall)x\in[0,\frac{\pi}{2}]$$

avem $t\in[0,1]$ şi deci

$$ft)=\frac{1}{2}\sqrt[2]{1-t^2},\ (\forall)\ t\in[0,1]$$

Aplicaţia 9[5]: Dacă a>0, să se determine funcţiile continue $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ ce verifică relaţia:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(acosx)\,dx+\frac{\pi a^2}{4}\le 2a\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(asinx)\,cosxdx$$

Soluţie: Funcţiile

$$g,h:[0,\frac{\pi}{2}]\to[0,a]\ g(x)=asinx,h(x)=acosx$$

satisfac ipotezele propoziţiei 3. Aplicînd această propoziţie se obţine soluţia

$$f(x)=x,\ (\forall)\ x\in[0,a]$$

Aplicaţia 10[2]: Dacă

$$a>0,\ m,n\in N^*\backslash(1)$$

să se determine funcţiile continue $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$\int_0^a f^2(x^m)\,dx+\frac{a^{2n+1}}{4(2n+1)}\le\int_0^a x^n f((a-x)^n)\,dx$$

Soluţie: Utilizarea propoziţiei 3 conduce la soluţia

$$f(x)=\frac{(a-\sqrt[m]{x})^n}{2},\ (\forall)\ x\in[0,a]$$

În partea finală a notei ne vom ocupa de rezolvarea unor ecuaţii funcţionale în care intervine o funcţie necunoscută f, presupusă primitivabilă, şi o primitivă **F** a ei.

Propoziţia 4: Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie primitivabilă pe $\mathbb{R}$ iar $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a ei. Dacă este verificată relaţia $F(x)f(1-x)=1$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$, atunci funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=F(x)F(1-x)$ este constantă.

Demonstrație:

Din

$$F(x)f(1-x)=1,\ (\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow F(1-x)f(x)=1,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$$

Calculînd derivata funcției g obținem:

$$g'(x)=f(x)F(1-x)-F(x)f(1-x)=1-1=0,\ (\forall)x\in\mathbb{R}$$

ceea ce arată că funcția **g** este constantă pe $\mathbb{R}$.

Aplicația 11[11]: Să se determine funcțiile primitivabile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ce verifică relația $F(x)f(1-x)=1$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$, unde $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui **f**.

Soluție: Conform propoziției 4 avem $F(x)F(1-x)=k$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$. Din relația dată rezultă că $f(x)F(1-x)=1$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$. În plus, $f(x)\neq 0$ și $F(x)\neq 0$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$, căci în caz contrar am avea $1=0$.
Cu aceste observații obținem:

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{1}{k},\ (\forall)x\in\mathbb{R}\Rightarrow F(x)=\pm e^{\frac{1}{k}x+c},\ (\forall)x\in\mathbb{R}$$

Deci

$$f(x)=\pm\frac{1}{k}e^{\frac{1}{k}x+c}\quad unde\ \ k=F(0)F(1)\ \ iar\ \ c\in\mathbb{R}$$

Propoziția 5: Fie $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ o funcție primitivabilă iar $F:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ o primitivă a ei.
Dacă

$$F(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=x,\ (\forall)x\in\mathbb{R}^*$$

atunci funcția

$$g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ g(x)=F(x)F\left(\frac{1}{x}\right)$$

este o constantă.

Demonstrație:

Din

$$F(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=x,\ (\forall)x\in\mathbb{R}^*$$

se obține

$$f(x)F(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}, \quad (\forall)x\in\mathbb{R}^*.$$

Atunci derivaţia funcţiei g este:

$$g'(x)=f(x)F(\frac{1}{x})-\frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})F(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}x=0, \quad (\forall)x\in\mathbb{R}^*$$

Prin urmare

$$g(x)=const, \quad (\forall)x\in\mathbb{R}^*$$

Aplicaţia 12[6]: Determinaţi funcţiile primitivabile

$$f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$$

ce satisfac ecuaţia funcţională:

$$F(x)f(\frac{1}{x})=x, \quad (\forall)x\in(0,+\infty)$$

unde F este o primitivă a lui f.

Soluţie: Conform propoziţiei 5,

$$F(x)F(\frac{1}{x})=k, \quad (\forall)X\in(0,+\infty)$$

Din relaţia enunţului rezultă imediat că

$$f(x)F(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}, \quad (\forall)x\in(0,+\infty)$$

şi deci

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{k}{x}, \quad (\forall)x\in(0,+\infty)$$

Se obţin soluţiile ecuaţiei date, exprimate prin

$$f(x)=ke^{c}x^{k-1}, \quad (\forall)x\in(0,+\infty) \quad \textit{unde} \quad k=F^2(1) \quad \textit{iar} \quad c\in\mathbb{R}$$

B I B L I O G R A F I E

1. BĂRBOSU, Dan: Problema 21568, G.M.B. nr.9/1988

2. BĂRBOSU, Dan: Problemă dată la concursul de matematică, etapa locală, cls.XII, Baia Mare 1990.

3. BĂRBOSU, Dan: Două ecuaţii funcţionale echivalente (va apare în revista ASTRA).

4. BĂTINEŢU, D.M.: Şiruri, Ed.Albatros 1979, pag.526-530.

5. BĂTINEŢU, D.M.: Problema 21680, G.M.B. nr.1/1989.

6. BERINDE, Vasile: Problema 21671*, G.M.B. nr.1/1989.

7. BOBOC, Nicu; COLOJOARĂ, Ion: Elemente de analiză matematică, Manual pentru cls.XII, Ed.did. şi ped. Bucureşti, 1986, pag.83.

8. CAVACHI, Marius: Problema 21333*, G.M.B. nr.1/1988.

9. HALMAGHI, Octavian; POPA, Emil: Problema 22124*, G.M.B. nr.6-7/1990.

10. KISS, Ludovic: Problema C:736, G.M.B. nr.10/1987.

11. SADOVEANU,Ioan: Problemă propusă la tabăra de matematică Ocna-Şugatag, 1986.

12. VARGA, Csaba: Problemă dată la concursul de matematică "Grigore Moisil", cls.XII, Baia Mare 1986.

13. VARGA, Csaba; RADELECKI, Sandor: Asupra unei clase de ecuaţii funcţionale, G.M.B. nr.8/1986, pag.275-277.

14. * * *: Problema 20828, G.M.B. nr.7/1986.

15. * * *: Problemă dată la etapa judeţeană a concursului de matematică, cls.XI, 1987.

16. * * *: Problemă dată la etapa naţională a concursului de matematică, cls.XII, 1986.

UNIVERSITATEA DIN BAIA MARE
FACULTATEA DE LITERE ŞI ŞTIINŢE