Universitatea din Baia Mare
Lucrările Seminarului de creativitate matematică
vol.1(1991-1992), pag. 81-88

SEGMENTE ŞI DREPTE CARE TREC PRIN CENTRUL CERCULUI ÎNSCRIS UNUI TRIUNGHI. PROPRIETĂŢI.

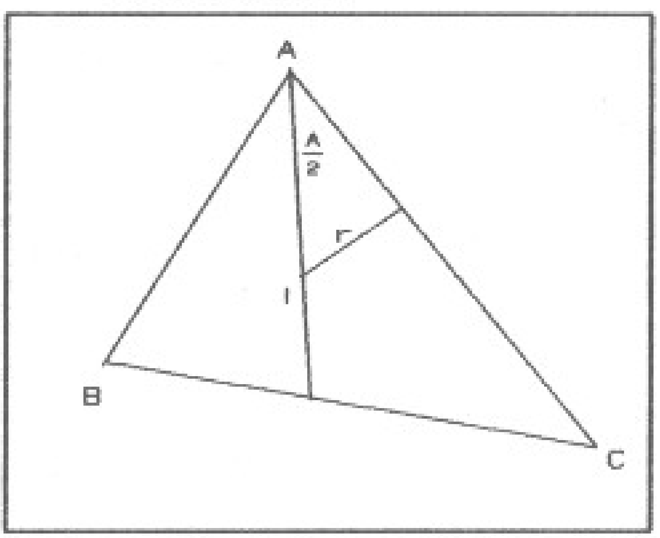
Nicolae OPREA

În lucrarea de faţă vom folosi notaţiile obişnuite dintr-un triunghi oarecare ABC.

Lema 1. *Dacă I este centrul cercului înscris unui triunghi oarecare ABC atunci avem relaţia*

$$AI=\frac{bc\cos\frac{A}{2}}{p}$$

Demonstraţie.



Din relaţiile

$$AI=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}} \quad \text{şi} \quad r=\frac{S}{p}$$

rezultă relaţia

$$AI=\frac{S}{p\sin\frac{A}{2}} \qquad (1)$$

Pe de altă parte ţinînd cont de faptul că

$$S=\frac{bc\sin A}{2} \quad \text{şi} \quad \sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

din relaţia (1) rezultă că

$$AI=\frac{bc\cos\frac{A}{2}}{p}$$

Lema 2. *Dacă I este centrul cercului înscris unui triunghi oarecare ABC atunci avem relaţia*

$$AI^2=2R(h_a-2r)$$

Demonstraţie. Din Lema 1 şi din relaţia

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt[2]{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

rezultă că

$$AI^2=\frac{bc(p-a)}{p} \qquad (1)$$

Pe de altă parte ţinînd cont de faptul că

$$bc=2Rh_a,\ \ p=\frac{s}{r},\ \ a=\frac{2s}{h_a},$$

din relaţia (1) deducem relaţia

$$AI^2=2R(h_a-2r)$$

Teorema 1. *Dacă I este centrul cercului înscris unui triunghi oarecare ABC şi i_a este lungimea bisectoarei unghiului $\sphericalangle A$ atunci avem relaţia*

$$i_a=\frac{AI^3+4RrAI}{AI^2+2Rr}$$

Demonstraţie. Din Lema 1 rezultă că

$$AI=\frac{bc\cos\frac{A}{2}}{p}$$

de unde avînd în vedere faptul că

$$bc=2Rh_a,\ \ h_a=\frac{2s}{a},\ \ r=\frac{s}{p}$$

deducem că

$$AI^2=\frac{4Rr(p-a)}{a}$$

Din ultima relaţie rezultă că

$$AI^2+2Rr=2Rr\frac{b+c}{a}$$

de unde deducem că

$$\frac{2Rr}{AI^2+2Rr}=\frac{a}{b+c} \qquad (1)$$

Din relaţia (1) şi din relaţia

$$\frac{AI^2+4R'r}{AI^2+2Rr}=1+\frac{2Rr}{AI^2+2Rr}$$

rezultă că

$$\frac{AI^2+4Rr}{AI^2+2Rr}=\frac{2p}{b+c}$$

Din ultima relaţie şi din Lema 1 deducem că

$$\frac{AI^3+4Rr\,AI}{AI^2+2Rr}=\frac{bc\cos\frac{A}{2}}{p}\cdot\frac{2p}{b+c}$$

de unde rezultă că

$$\frac{AI^3+4Rr\,AI}{AI^2+2Rr}=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c},$$

dar

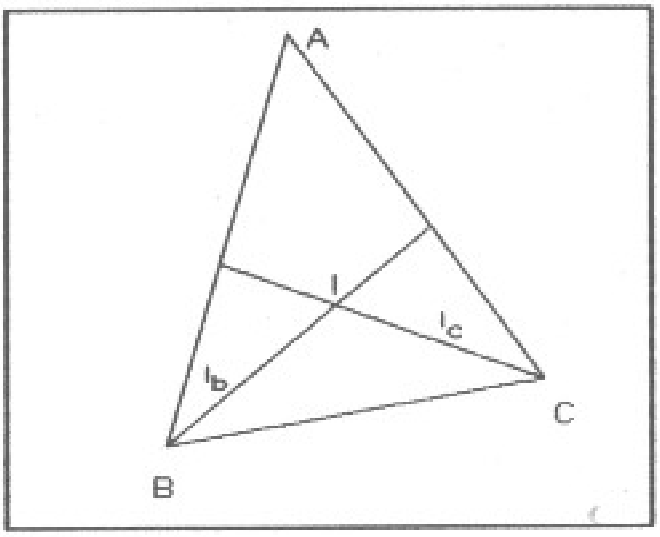
$$\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}=i_a$$

deci

$$i_a=\frac{AI^3+4Rr\,AI}{AI^2+2Rr}$$

Teorema 2. *(reciproca teoremei 1). Dacă într-un triunghi ABC două bisectoare sînt egale atunci triunghiul ABC este isoscel.*

Demonstrație.



Presupunem că în triunghiul ABC $i_b=i_c$. Din teorema 1 rezultă că

$$\frac{BI^3+4Rr\,BI}{BI^2+2Rr}=\frac{CI^3+4Rr\,CI}{CI^2+2Rr}$$

de unde deducem că

$$(BI-CI)\,[BI^2\cdot CI^2+2Rr(BI-CI)^2+2Rr\cdot BI\cdot CI+8R^2r^2]=0$$

Din ultima relație deoarece

$$BI^2\cdot CI^2+2Rr(BI-CI)^2+2Rr\cdot BI\cdot CI+8R^2r^2>0$$

rezultă că BI−CI=0 adică BI=CI, de unde rezultă că triunghiul BIC este isoscel.
Triunghiul BIC fiind isoscel rezultă că

$$\frac{\measuredangle B}{2}=\frac{\measuredangle C}{2}$$

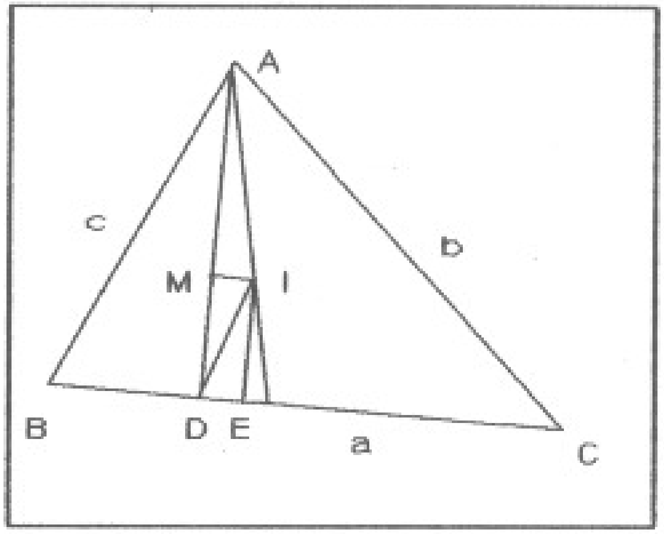
de unde deducem că $\measuredangle B=\measuredangle C$, deci triunghiul ABC este isoscel.

Observație. Teorema 2 constituie o problemă veche și în același timp foarte dificilă. Această problemă a fost rezolvată prima dată de către J.Steiner(1796–1863). După Steiner mai mulți matematicieni s-au ocupat de această problemă, au rezolvat-o în diverse moduri dar toate rezolvările s-au bazat pe metoda reducerii la absurd, iar unele dintre ele și pe construcții ajutătoare.

Teorema 3. *Dacă într-un triunghi oarecare ABC se duce înălțimea* $AD=h_a$ ($D\in BC$) *și I este centrul cercului înscris atunci există relația:*

$$DI^2=(2R-h_a)(h_a-2r)$$

Demonstrație.



Fie E și M proiecțiile punctului I pe BC respectiv pe AD. Patrulaterul IMDE fiind un dreptunghi, rezultă că MD=IE dar IE=r deci MD=r (1). Aplicînd teorema lui Pitagora generalizată triunghiului ADI rezultă că

$$DI^2=h_a^2+AI^2-2h_a\cdot AM$$

de unde deducem că

$$DI^2=h_a^2+AI^2-2h_a(h_a-MD) \qquad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) și din lema 2 rezultă că

$$DI^2=h_a^2+2R(h_a-2r)-2h_a(h_a-r)$$

de unde după efectuarea calculelor deducem că

$$DI^2=(2R-h_a)(h_a-2r)$$

Consecința 3.1. Din teorema 3 rezultă inegalitatea lui Euler $R\geq 2r$.

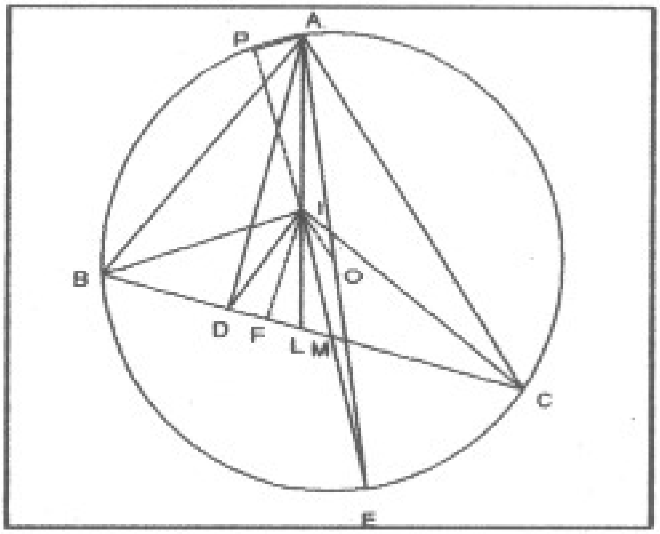
Demonstrația acestei consecințe o lăsăm în seama cititorului.

Teorema 4. *Dacă într-un triunghi ascuțitunghic ABC se duce înălțimea AD ($D\in BC$) și I este centrul cercului înscris, O centrul cercului circumscris și dacă $\{E\}=C(O,R)\cap(AO$ și $\{M\}=BC\cap IE$ atunci ID și IM sînt ceviene izogonale în triunghiul BIC.*

Demonstrație.

Fie F proiecția punctului I pe BC și $\{L\}=AI\cap BC$. Din lema 2 rezultă că

$$\frac{BI^2}{CI^2}=\frac{2R(h_b-2r)}{2R(h_c-2r)}$$



de unde deducem că

$$\frac{BI^2}{CI^2}=\frac{h_b-2r}{h_c-2r}$$

Din ultima relaţie ţinînd cont de relaţiile

$$h_b=\frac{2s}{b},\quad h_c=\frac{2s}{c},\quad r=\frac{s}{p}$$

rezultă relaţia

$$\frac{BI^2}{CI^2}=\frac{c}{b}\cdot\frac{p-b}{p-c} \qquad (1)$$

Pe de altă parte AI fiind bisectoare în triunghiul ABC conform teoremei bisectoarei avem relaţia

$$\frac{BL}{LC}=\frac{c}{b} \qquad (2)$$

Deoarece F este proiecţia punctului I pe BC rezultă că BF=p-b şi FC=p-c, de unde rezultă relaţia

$$\frac{BF}{FC}=\frac{p-b}{p-c}$$

Din ultima relaţie şi din relaţiile (1) şi (2) deducem că

$$\frac{BI^2}{CI^2}=\frac{BL}{LC}\cdot\frac{BF}{FC}$$

de unde conform teoremei lui Steiner rezultă că IF şi IL sînt ceviene izogonale în triunghiul BIC, adică $\angle BIF=\angle CIL$ (3).

Pe de altă parte deoarece (IO) este mediană în triunghiul AIE avem relaţia

$$IO^2=\frac{2(AI^2+IE^2)-AE^2}{4}$$

de unde deducem relaţia

$$IE^2=\frac{4IO^2+AE^2-2AI^2}{2}$$

Din ultima relaţie şi din relaţiile $IO^2=R(R-2r)$ (relaţia lui Euler) şi $AE=2R$, $AI^2=2R(ha-2r)$ (lema 2) rezultă relaţia

$$IE^2=2R(2R-h_a) \qquad (4)$$

Notînd cu P intersecţia dintre EI şi C(O,R) rezultă că m(∠EPA)=90 (CAE) fiind diametru în C(O,R) de unde rezultă că triunghiul IPA este dreptunghic în P.

Pe de altă parte aplicînd puterea punctului I faţă de C(O,R) care este egală cu 2Rr, rezultă că

$$IP\cdot IE=2Rr$$

Din ultima relaţie şi din relaţia (4) deducem că

$$IP^2=\frac{2Rr^2}{2R-h_a}$$

de unde rezultă că

$$\frac{IP^2}{AI^2}=\frac{2Rr^2}{AI^2(2R-h_a)} \qquad (5)$$

Din relaţia (5), lema 2 şi din faptul că r=IF deducem că

$$\frac{IP^2}{AI^2}=\frac{IF^2}{DI^2}$$

de unde rezultă că

$$\frac{IP}{AI}=\frac{IF}{DI}$$

Din ultima relaţie rezultă că triunghiurile dreptunghice IDF şi IAP sînt asemenea. Din asemănarea acestor triunghiuri rezultă ∠DIF=∠AIP dar ∠AIP=∠MIL (opuse la vîrf) de unde deducem că

$$\angle DIP=\angle MIL \qquad (6)$$

Din relaţiile (3) şi (6) rezultă că

$$\angle BID=\angle CIM$$

de unde rezultă că cevienele ID și IM sînt izogonale în triunghiul BIC.

În încheierea acestui articol propunem cititorului să demonstreze folosind teorema 4 următoarea teoremă:

Teorema 5. *Dacă I este centrul cercului înscris unui triunghi ascuțitunghic ABC și A',B',C' punctele diametral opuse lui A,B,C de pe cercul circumscris și dacă*

$$A_1 = BC \cap IA',\ b_1 = AC \cap IB',\ C_1 = AB \cap IC'$$

atunci cevienele AA_1, BB_1 *și* CC_1 *sînt concurente.*

Indicație. În triunghiul ABC se duc înălțimile AD, BE și CF și atunci în triunghiul BIC, CIA, AIB conform teoremei 4 se formează următoarele perechi de ceviene izogonale: (ID, IA_1); (IE, IB_1) și (IF, IC_1).
În continuare se aplică teorema lui Steiner și teorema directă și reciprocă a lui Ceva.

UNIVERSITATEA DIN BAIA MARE
FACULTATEA DE LITERE ȘI ȘTIINȚE