Universitatea din Baia Mare
Lucrările Seminarului de creativitate matematică,
Vol. 1(1991-1992), pag.89-103

LIMITA SUPERIOARĂ ȘI LIMITA INFERIOARĂ ALE UNUI ȘIR DE NUMERE REALE

Boris PETRACOVICI

Scopul acestui articol este de a prezenta noțiunile de limită superioară și limită inferioară ale unui șir de numere reale, precum și cele mai importante proprietăți ale lor, și de a ilustra utilitatea cunoașterii acestor noțiuni.

1. **Definiție**. Fie $(x_n)_{n\ge1}$ un șir de numere reale și $x\in\bar{\mathbb{R}}$. Punctul x se numește punct limită al șirului $(x_n)_{n\ge1}$ dacă orice vecinătate a lui x conține o infinitate de termeni ai șirului.

2. **Teoremă**. *Fie $(x_n)_{n\ge1}$ un șir de numere reale. Punctul $x\in\bar{\mathbb{R}}$ este punct limită pentru $(x_n)_{n\ge1}$ dacă și numai dacă există un subșir $(x_{n_k})_{k\ge1}$ al lui $(x_n)_{n\ge1}$ care are limita x.*

Demonstrație. **Necesitatea**. Fie $x\in\bar{\mathbb{R}}$ un punct limită pentru șirul $(x_n)_{n\ge1}$. Presupunem x finit. Atunci vecinătatea $V_1=(x-1,\ x+1)$ a lui x conține o infinitate de termeni ai șirului. Fie $x_n\in V_1$ unul dintre aceștia. Deoarece vecinătatea $V_2=(x-1/2,\ x+1/2)$ a lui x conține o infinitate de termeni ai șirului, putem alege dintre aceștia termenul x_{n_2} cu $n_2>n_1$. Repetăm raționamentul. După p pași am ales termenii $x_{n_1}\in V_1,\dots,$ $x_{n_2}\in V_p$ cu $n_1<n_2<\dots<n_p$, $V_p=(x-1/p,\ x+1/p)$. Cum vecinătatea

$$V_{p+1}=(x-\frac{1}{p+1},\ \ x+\frac{1}{p+1})$$

a lui x conține o infinitate de termeni ai șirului dat, putem alege $x_{n_{p+1}}\in V_n$, $n_{p+1}>n_p$.
Continuînd procedeul construim subșirul $(x_{n_k})_{k\ge1}$ al lui $(x_n)_{n\ge1}$, cu proprietatea că

$$x_{n_k}\in V_k,\ \ \forall k\geq 1,\ \ adica\ \ |x_{n_k}-x|<\frac{1}{k},\ \ \forall k\geq 1$$

Rezultă

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$$

Raţionament analog pentru x infinit.

Suficienţa. Fie $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ un subşir al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ cu

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$$

Din definiţia limitei unui şir, rezultă că orice vecinătate a lui x conţine toţi termenii şirului, începînd cu un anumit rang, adică conţine o infinitate de termeni ai şirului, deci x este punct limită pentru $(x_n)_{n\geq 1}$.

Notăm cu $L(x_n)$ mulţimea tuturor punctelor limită ale şirului $(x_n)_{n\geq 1}$.

3. **Definiţie**. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale.

a) Prin limită inferioară a şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ înţelegem numărul $\inf L(x_n)$ şi o notăm cu

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$$

b) Prin limită superioară a şirului $(x_n)_{n\geq 1}$ înţelegem numărul $\sup L(x_n)$ şi o notăm cu

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$$

4. **Observaţii**.

a) Orice şir de numere reale posedă limită inferioară şi limita superioară, deşi nu orice şir de numere reale posedă limită.

b) În lema lui Cesaro rezultă că orice şir mărginit de numere reale posedă cel puţin un punct limită în $\mathbb{R}$.

c) Dacă $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ este un subşir al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, atunci avem inegalităţile:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n\leq\underline{\lim}_{k\to\infty} x_{n_k}\ \ si\ \ \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n\geq\overline{\lim}_{k\to\infty} x_{n_k}$$

d) Fie x un punct limită al şirului $(x_n)_{n\geq 1}$. Atunci avem:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leq x \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$$

5. **Exemple.**

$$a) \quad x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} + (-1)^n \frac{n}{2n+1}$$

Avem

$$x_n = \begin{cases} 1+\dfrac{2k}{4k+1}, & pentru \ \ n=2k \\ -\dfrac{2k+1}{4k+3}, & pentru \ n=2k+1 \end{cases}$$

Cum

$$\lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{2k}{4k+1}\right) = \frac{3}{2} \quad si \quad \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{2k+1}{4k+3}\right) = -\frac{1}{2}$$

rezultă că

$$L(x_n) = \{-\frac{1}{2}, \ \frac{3}{2}\}$$

Deci

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \quad L(x_n) = \frac{3}{2} \quad si \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \quad L(x_n) = -\frac{1}{2}$$

$$b) \quad x_n = \frac{n^{2(-1)^n}}{n}$$

Observăm că

$$x_n = \begin{cases} 2k, \ pentru \ \ n=2k \\ \dfrac{1}{(2k+1)^3}, \ pentru \ \ n=2k+1 \end{cases}$$

Deci

$$L(x_n) = \{0, \infty\}, de \ \ unde \ \ \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \infty \ \ si \ \ \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$$

Vom da în continuare două caracterizări ale limitei inferioare şi limitei superioare, utile în demonstrarea proprietăţilor lor.

6. **Teoremă**. *Fie* $(x_n)_{n\geq 1}$ *un şir de numere reale. Atunci:*

$$a)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf\{\sup\{x_k : k\geq n\},\quad n\in\mathbf{N}\}$$

$$b)\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \sup\{\inf\{x_k : k\geq n\},\quad n\in\mathbf{N}\}$$

Demonstraţie.

Fie

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \quad si \quad l = \inf\{\sup\{x_k : k\geq n\},\quad n\in\mathbf{N}\}$$

Din definiţia infimumului, rezultă că l îndeplineşte condiţiile:

$$\begin{cases} (i) & l\leq \sup\{x_k :\ k\geq n\},\ \forall\, n\in\mathbf{N} \\ (ii) & \forall\, \varepsilon>0,\ \exists n_1\in\mathbf{N}\ \text{asa incit}\ \sup\{x_k : k\geq n_1\} < l+\varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} (i) & \forall\, n\in\mathbf{N},\ \forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, k_{n,\varepsilon}\in\mathbf{N}\ \text{asa incit}\ l-\varepsilon < x_{k_{n,\varepsilon}} \\ (ii) & \forall\varepsilon>0,\ \exists n_1\in\mathbf{N}\ \text{asa incit}\ x_k < l+\varepsilon,\ \forall\, k\geq n_1 \end{cases}$$

Pentru a arăta că $\alpha = l$, arătăm că α verifică aceste două condiţii.
(i) Fie $n\in\mathbf{N}$ şi $\varepsilon>0$ oarecare fixaţi.
Cum

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \sup L(x_n) \Rightarrow \exists x_{n_\varepsilon}\in L(x_n)\quad \text{aşa că}$$

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < x_{n_\varepsilon} < \alpha$$

Din $x_{n_\varepsilon}\in L(x_n)$ rezultă că $\exists (x_{n_K})_{K\geq 1}$ subşir al lui $(x_n)_{n\geq 1}$ astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = x_{n_\varepsilon},\ adica\ \exists k_\varepsilon\in\mathbf{N}$$

astfel încît $\forall k > k_\varepsilon$ să avem

$$|x_{n_k} - x_{n_\varepsilon}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Atunci

$$x_{n_k} > x_{n_\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{2} > \alpha - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \alpha - \varepsilon$$

Deci $x_n > \alpha - \varepsilon$ pentru $k > k_\varepsilon$, adică are loc (i).

(ii) Demonstrăm a doua condiţie prin reducere la absurd.

Presupunem că relaţia nu are loc pentru α, adică $\exists \varepsilon>0$ astfel încît $\forall n \in \mathbf{N}$, să existe $k\geq n$ cu $x_k\geq\alpha+\varepsilon$.

Pentru fiecare n natural, considerăm $k\geq n$ cu $x_{n_k}\geq\alpha+\varepsilon$. Construim astfel un subşir $(x_{n_k})_{k\geq1}$ al şirului $(x_n)_{n\geq1}$. Acesta are un subşir al său $(x_{n_{k_l}})_{l\geq1}$ cu limita $\beta\in\overline{\mathbf{R}}$. Deci $x_{n_{k_l}}\geq\alpha+\varepsilon$ şi astfel $\beta\geq\alpha+\varepsilon$.

Însă $(x_{n_{k_l}})_{l\geq1}$ este un subşir al lui $(x_n)_{n\geq1}$, deci limita sa, $\beta\in L(x_n)\Rightarrow\beta\leq\alpha$, contradicţie.

Rezultă deci că α verifică şi condiţia (ii).

7. **Teoremă**. *Fie* $(x_n)_{n\geq1}$ *un şir de numere reale şi* $(a_n)_{n\geq1}$, $(b_n)_{n\geq1}$ *şirurile cu termenul general:*

$$a_n = \sup\{x_k;\ k\geq n\}$$
$$b_n = \inf\{x_k;\ k\geq n\},\quad \forall n\in\mathbf{N}$$

Atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \quad si \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

Demonstraţie. Şirul $(a_n)_{n\geq1}$ este monoton descrescător, pentru că $\{x_k:\ k\geq n+1\}\subset\{x_k: k\geq n\}$ de unde

$$\sup\{x_k;\ k\geq n+1\}\leq\sup\{x_k;\ k\geq n\},\ \forall n\in\mathbf{N},\ adica\ \ a_{n+1}\leq a_n$$

Rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n; n\in\mathbf{N}\},\ \ adica\ \ \lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{\sup\{x_k: k\geq n\}\},\ \ n\in\mathbf{N}\}$$

deci, conform teoremei 5 avem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

Relaţia a doua se demonstrează analog, ţinînd cont că şirul $(b_n)_{n\geq1}$ este monoton descrescător.

8. **Propoziţie**. Fie $(x_n)_{n\geq1}$ un şir de numere reale şi $(a_n)_{n\geq1}$, $(b_n)_{n\geq1}$ şirurile date de:

$a_n=\inf\{x_k,\ k\geq n\}$

$b_n=\sup\{x_k,\ k\geq n\}$

Atunci avem:

$$b_n \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \le a_n$$

Demonstraţie. Fie $n\ge 1$ oarecare fixat. Evident avem

$$b_n \le \sup\{b_n,\ n\in\mathbf{N}\} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

$$a_n \ge \inf\{a_n,\ n\in\mathbf{N}\} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf L(x_n) \le \sup L(x_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

9. **Consecinţe**. Fie $(x_n)_{n\ge1}$ un şir de numere reale.

a) Dacă $(x_n)_{n\ge1}$ este mărginit superior atunci $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ este finită

b) Dacă (x_n), $n\ge1$ este mărginit inferior, atunci $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ este finită

10. **Teoremă**. *Fie $(x_n)_{n\ge1}$ un şir de numere reale. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ există dacă şi numai dacă $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$. În acest caz cele trei limite coincid.*

Demonstraţie. Necesitatea. Fie $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
Presupunem x finit şi fie $\varepsilon>0$ oarecare.
Rezultă că există $n\in\mathbf{N}$ aşa încît $\forall k\ge n$, $|x_k-x|<\varepsilon$, adică

$$x-\varepsilon<x_k<x+\varepsilon \Rightarrow \sup\{x_k : k\ge n\} \le x+\varepsilon \ \ \text{şi} \ \inf\{x_k : k\ge n\} \ge x-\varepsilon$$

de unde

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \le x+\varepsilon, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \ge x-\varepsilon$$

Deoarece ε nu depinde de $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ şi $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, trecînd la limită pentru $\varepsilon\to0$ obţinem

$$x \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \le x$$

Deci

$$x = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$$

Suficienţa. Presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ şi fie $\varepsilon>0$ oarecare.
Cum

$$x = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} (\sup\{x_k,\ k\geq n\}),\ \mathbf{N}\to\exists N_1\in\mathbf{N}$$

aşa încît $\forall\ n>N_1$, să avem $\sup\{x_k, k\geq n\}<x+\varepsilon$; de aici $x_n\leq x+\varepsilon$, $\forall n\geq N_1$

Analog $\exists N_2\in\mathbf{N}$ aşa că $x_n\geq x-\varepsilon$, $\forall n>N_2$

Atunci pentru orice $n\geq N=\max\{N_1,\ N_2\}$, avem $x-\varepsilon<x_n x+\varepsilon$, adică

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$.

Raţionamentul analog dacă $x, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n;\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ sînt infinite.

11. Teoremă. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de elemente din $\overline{\mathbf{R}}$. Atunci mulţimea $L(x_n)$ a tuturor punctelor limită ale şirului dat, este închisă în $\overline{\mathbf{R}}$.*

Demonstraţie. Fie $(y_k)_{k\geq 1}$ un şir de elemente din $L(x_n)$, cu $\lim\limits_{k\to\infty} y_k=y$, $y\in\overline{\mathbf{R}}$. Arătăm că $y\in L(x_n)$. Distingem cazurile y finit, y infinit.

(i) y finit $y_k\in L(x_n)\Rightarrow$ există un subşir al lui $(x_n)_{n\geq 1}$ convergent către y_k.

Pentru $\varepsilon=1$, $\exists N_1\in\mathbf{N}$ aşa încît $|x_n-y_1|<1$, $\forall n>N_1$.

Atunci pentru $n_1\geq N_1$, avem $|x_n-y_1|<1$.

Analog, pentru $\varepsilon=1/2$, $\exists N_2\in\mathbf{N}$ aşa încît $|x_n-y_1|<1/2$, $\forall n>N_2$.

Alegem $n_2>n_1$, $n_2>N_2$ şi $|x_n\ -y_2|<1/2$. Prin inducţie construim un subşir al lui $(x_n)_{n\geq 1}$, notat $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ cu $|x_{n_k}-y_k|<1/k$.

Din inegalitatea $|y-x_n\ |\leq|y-y_k|+|y_k-x_n|$, $\forall k\geq 1$, prin trecere la limită cînd $k\to\infty$, avem $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=y$, deci $y\in L(x_n)$.

(ii y infinit se tratează analog.

12. Corolare. a) Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir mărginit de numere reale. Atunci mulţimea $L(x_n)$ a tuturor punctelor limită a şirului dat este închisă în $\mathbf{R}$.

b) Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir mărginit de numere reale. Atunci

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \max L(x_n)\quad \text{şi}\quad \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \min L(x_n)$$

c) Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale care se poate scrie ca o "reuniune" de p subşiruri $(x_n^1)_{n\geq 1},\dots,(x_n^p)_{n\geq 1}$ cu limitele $x_1,\dots,x_p$. Atunci

$$\underline{\lim_{x\to\infty}} x_n = \min\{x_i,\ i=\overline{1,p}\},\ \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \max\{x_i,\ i=\overline{1,p}\}$$

Demonstrație. b) $(x_n)_{n\geq 1}$ mărginit, rezultă că $L(x_n)$ mărginită (consecința 8,c) $L(x_n)$ este închisă (Teorema 10) și deci este compactă.

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \inf L(x_n), \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \sup L(x_n)$$

și cum într-o mulțime compactă sup și inf aparțin mulțimii,

$$\Rightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \min L(x_n) \quad \text{și} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \max L(x_n)$$

Proprietățile principale ale limitei superioare și limitei inferioare sînt date în

13. **Propoziție**.

1) a) $\overline{\lim}_{n\to\infty} (x_n+y_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$

b) $\underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n+y_n) \geq \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n + \underline{\lim}_{n\to\infty} y_n$

2) a) $\overline{\lim}_{n\to\infty} (-x_n) = -\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$

b) $\underline{\lim}_{n\to\infty} (-x_n) = -\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$

3) Dacă $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ șiruri de numere pozitive. Atunci

a) $\overline{\lim}_{n\to\infty} (x_n y_n) \leq (\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n)(\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n)$

b) $\underline{\lim}_{n\to\infty} (x_n y_n) \geq (\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n)(\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n)$

4) $\underline{\lim}_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n}$; $\overline{\lim}_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n}$

ori de cîte ori operațiile respective sînt definite.

Demonstrație.

1) a) $x_k+y_k \leq \sup\{x_k : k\geq n\} + \sup\{y_k : k\geq n\}$ pentru $k\geq n \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup\{x_k+y_k : k\geq n\} \leq \sup\{x_k ; k\geq n\} + \sup\{y_k : k\geq n\}$

Trecînd la limită pentru $n\to\infty$, avem

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n) \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}\,y_n$$

2) Se foloseşte de două ori relaţia sup(-A)=-inf A

O proprietate importantă este dată în următoarea teoremă care este o generalizare a teoremei Césaro-Stolz.

14. Teoremă. *Fie* $(a_n)_{n\geq1}$ *un şir de numere reale şi* $(b_n)_{n\geq1}$ *şir strict crescător de numere reale şi divergent. Atunci:*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{a_n}{b_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{a_n}{b_n} \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

Demonstraţie. Notăm

$$l = \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} \quad \text{şi} \quad L = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$$

Deci

$$l = \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\inf\left\{\frac{a_{k+1}-a_k}{b_{k+1}-b_k}\ ;\ k\geq n\right\}\right]\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N} \text{ aşa că}$$

$$\left|\inf\left\{\frac{a_{k+1}-a_k}{b_{k+1}-b_n}\ ;\ k\geq n\right\}-l\right|<\varepsilon \text{ pentru } \forall\, n>n_\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l-\varepsilon< \inf\left\{\frac{a_{k+1}-a_k}{b_{k+1}-b_n}:\ k\geq n\right\} <l+\varepsilon,\ \forall\, n>n_\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{a_{k+1}-a_k}{b_{k+1}-b_k}>l-\varepsilon,\ \forall\, k\geq n;\ \forall\, n\geq n_\varepsilon$$

Pe de altă parte,

$$L = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty}\left[\sup\left\{\frac{a_{k+1}-a_k}{b_{k+1}-b_k}\ :k\geq n\right\}\right]\Leftrightarrow\forall\,\varepsilon>0,\ \exists n_\varepsilon'\in\mathbb{N}$$

aşa că

$$L-\varepsilon<\sup\left\{\frac{a_{k+1}-a_k}{b_{k+1}-b_k}\ :\ k\geq n\right\} <L+\varepsilon,\ \forall\, n>n_\varepsilon'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{a_{k+1}-a_k}{b_{k+1}-b_k}<L+\varepsilon,\ \forall\, k>n,\ \forall\, n>n_\varepsilon'$$

Deci pentru $k>N_\varepsilon=\max(n_\varepsilon, n_\varepsilon')$, avem:

$$l-\varepsilon<\frac{a_{k+1}-a_k}{b_{k+1}-b_k}<L+\varepsilon \qquad (1)$$

$(b_n)_{n\geq 1}$ este şir crescător $\Rightarrow b_{n+1}-b_n>0$ şi din relaţia anterioară obţinem:

$$(l-\varepsilon)(b_{k+1}-b_k) < a_{k+1}-a_k < (L+\varepsilon)(b_{k+1}-b_k),\ \forall\, k\geq N_\varepsilon$$

Dînd lui k valori de la $N_\varepsilon+1$ la $N_\varepsilon+n$ şi prin însumarea relaţiilor obţinute, ajungem la:

$$(l-\varepsilon)(b_{N_\varepsilon+n}-b_{N_\varepsilon+1}) < a_{N_\varepsilon+n}-a_{N_\varepsilon+1} < (L+\varepsilon)(b_{N_\varepsilon+n}-b_{N_\varepsilon+1})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(l-\varepsilon)\left(1-\frac{b_{N_\varepsilon+1}}{b_{N_\varepsilon+n}}\right) < \frac{a_{N_\varepsilon+1}}{b_{N_\varepsilon+n}} - \frac{a_{N_\varepsilon+1}}{b_{N_\varepsilon+n}} < (L+\varepsilon)\left(1-\frac{b_{N_\varepsilon+1}}{b_{N_\varepsilon+n}}\right)$$

Trcînd la limită pentru $n\to\infty$, obţinem, ţinînd cont că $b_n\to\infty$, relaţiile

$$l-\varepsilon<\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}<L+\varepsilon \quad \text{şi}$$

$$l-\varepsilon<\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}<L+\varepsilon$$

Rezultă că

$$l-\varepsilon<\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}<\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}<L+\varepsilon,\ \textit{pentru orice}\ \varepsilon>0$$

Trecînd la limită pentru $\varepsilon\to 0$, ajungem la relaţia cerută.

15. Consecinţă. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive. Atunci:

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\leq\underline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\leq\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}\leq\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

16. Exemple. Să se calculeze limita superioară şi limita inferioară pentru şirurile:

1) $x_n = (-1)^n$

2) $x_n = \sin\frac{n\pi}{2}$

3) $x_n = \frac{n}{n+1}\sin\frac{n\pi}{2}$

4) $x_n = \frac{1}{n}n^{(-1)^n} + \sin\frac{n\pi}{2}$

5) $x_n = \frac{1}{n}n^{(-1)^n} + \sin^2\frac{n\pi}{4}$

Soluţie.

2) Descompunem şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ în patru subşiruri constante:

$$x_{4k} = \sin 2k\pi = 0$$

$$x_{4k+1} = \sin(\frac{\pi}{2}+2k\pi) = 1$$

$$x_{4k+2} = \sin(\pi+2k\pi) = 0$$

$$x_{4k+3} = \sin(\frac{3\pi}{2}+2k\pi) = -1$$

Conform corolarului 11, punctul c, avem

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -1 \ \text{și} \ \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 1$$

5) Descompunem şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ în patru subşiruri

$$x_{4k} = 1+\sin^2 k\pi = 1$$

$$x_{4k+1} = \frac{1}{n^2}+\sin^2(\frac{\pi}{4}+k\pi) = \frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}\to\frac{1}{2}$$

$$x_{4k+2} = 1+\sin^2(\frac{\pi}{2}+k\pi) = 1+1 = 2$$

$$x_{4k+3} = \frac{1}{n^2}+\sin^2(\frac{3\pi}{4}+k\pi = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \to\frac{1}{2}$$

Aşadar,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2} \ \text{și} \ \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 2$$

Cu ajutorul noţiunilor de limită inferioară şi limită superioară a unui şir numeric, se pot da formulări rafinate ale criteriilor raportului şi radicalului de convergenţă a seriilor cu termeni pozitivi.

17. Teoremă. *(criteriul raportului)*

Fie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

o serie cu termeni pozitivi. Atunci:

a) *dacă* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *este convergentă*

b) *dacă* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1,\ \sum\limits_{n+1} x_n$ *este divergentă*

c) *dacă* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{x_{n+1}}{x_n} \le 1$ *sau* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \frac{x_{n+1}}{x_n} \ge 1$, *caz de dubiu*

18. Teoremă. *(criteriul radicalului)*

Fie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

o serie cu termeni pozitivi. Atunci:

a) *dacă* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \sqrt[n]{x_n} < 1,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *este convergentă*

b) *dacă* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \sqrt[n]{x_n} > 1,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *este divergentă*

c) *dacă* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \sqrt[n]{x_n} = 1$, *caz de dubiu*

19. Teoremă (Criteriul Raabe-Duhamel)

Fie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

o serie cu termeni pozitivi. Atunci:

$$a)\ \textit{dacă}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)>1,\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n\ \textit{este convergentă}$$

$$b)\ \textit{dacă}\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)<1,\ \sum_{n=1}^{\infty} x_n\ \textit{este divergentă}$$

$$c)\ \textit{dacă}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)\le 1\ \textit{sau}\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)\ge 1,\ \textit{caz de dubiu}$$

20. Observaţie. Legătura între teoremele 17 şi 18 este dată de consecinţa teoremei 14.

21. Exemple.

a) Fie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5+(-1)^n}{2}\right)^{-n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^6}+\ldots$$

Deoarece

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}=\frac{1}{2}\quad \textit{şi}\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{x_n}=\frac{1}{3}$$

criteriul obişnuit al radicalului nu este aplicabil. Din teorema 18 rezultă că seria este convergentă.

b) Considerăm seria :

$1+a+ab+a^2b+a^2b^2+\ldots+a^nb^{n-1}+a^nb^n+\ldots\ (0<a<b)$

Aplicăm mai întîi criteriul raportului.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\begin{cases} a, n\ \textit{impar} \\ b, n\ \textit{par}\end{cases}$$

Deci

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}=b\quad \textit{şi}\quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{x_{n+1}}{x_n}=a$$

Atunci dacă $b<1$, seria este convergentă, iar dacă $a>1$, seria este divergentă.

Acest criteriu nu dă nici un răspuns pentru cazul $a<1<b$.

Utilizăm în continuare criteriul rădăcinii.

$$\sqrt[n]{x_n} = \begin{cases} \sqrt[2k]{a^{2k}b^{2k-1}}, & n=2k \\ \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}b^{2k+1}}, & n=2k+1 \end{cases}$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \sqrt{ab}$$

Dacă ab<1, seria este convergentă; dacă ab>1, seria este divergentă, dacă ab=1, adică b=1/a, se obţine seria 1+a+1+a+1+a+... care este divergentă.

BIBLIOGRAFIE

1. ARAMĂ, L.; MOROZAN, T.: Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral, vol.I, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1964.

2. CHIRIŢĂ, S.: Probleme de matematici superioare, Ed.Did. şi Ped., Bucureşti, 1989.

3. FIHTENHOLŢ, G.M.: Curs de calcul diferenţial şi integral, vol.I, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1963.

4. GELBAUM, B.R.; OLMSTED J.M.H.: Contraexemple în analiză, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1973.

5. KONNERTH, O.: Greşeli tipice în învăţarea analizei matematice, Ed. Dacia, Cluj, 1982.

6. NICOLESCU, M.: Analiză Matematică, vol.I, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1958.

7. POPA, C.: Introducere în analiza matematică prin exerciţii şi probleme, Ed. Facla, 1976.

8. SIREŢCHI, Gh.: Calcul diferenţial şi integral, I, II, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

UNIVERSITATEA DIN BAIA MARE
FACULTATEA DE LITERE ŞI ŞTIINŢE