Universitatea din Baia Mare
Lucrările Seminarului de creativitate matematică,
Vol.1(1991-1992), pag.105-122

ÎN LEGĂTURĂ CU EXISTENŢA PRIMITIVELOR UNOR FUNCŢII REALE

Lia PETRACOVICI

Scopul acestui articol este de a aprofunda şi sistematiza chestiuni legate de problema foarte importantă şi de multe ori dificilă, a existenţei sau neexistenţei primitivei unei funcţii $f:I\to\mathbb{R}$, $I\subset\mathbb{R}$ interval.

Se ştie că mulţimea funcţiilor reale continue pe $\mathbb{R}$ este o submulţime strictă a mulţimii funcţiilor reale care admit primitive pe $\mathbb{R}$, iar aceasta la rîndul ei este o submulţime strictă a mulţimii funcţiilor reale care au proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$. Aspectele care diferenţiază aceste clase de mulţimi sînt cele care, de cele mai multe ori, ridică probleme elevilor şi studenţilor. Articolul se ocupă cu unele dintre aceste aspecte. Mai exact, în prima parte se construieşte o clasă largă de funcţii discontinue care admit primitive, clasă care conţine multe dintre funcţiile discontinue cu primitive ce apar în manualul de analiză de clasa a XII-a şi în Gazeta Matematică. În a doua parte se studiază legătura dintre proprietatea lui Darboux şi existenţa primitivelor.

1. **Preliminarii**. Reamintim cîteva definiţii şi rezultate pe care le vom folosi în continuare.

Definiţia 1.1. Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie. Spunem că <u>f are proprietatea lui Darboux pe I</u>, dacă pentru orice pereche de puncte $a, b\in I$, cu $f(a)\neq f(b)$ şi orice număr real λ cuprins între $f(a)$ şi $f(b)$ există un punct c situat între a şi b astfel ca $f(c)=\lambda$.

Teorema 1.2. (de caracterizare a funcţiilor cu proprietatea lui Darboux). *Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie. Atunci* *următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

i) Funcţia f are proprietatea lui Darboux,

ii) Oricare ar fi $J\subset I$ un interval, mulţimea $f(J)$ este un interval.

Definiţia 1.3. Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie. Spunem că <u>f admite primitive pe $\mathbb{R}$</u> dacă există o funcţie $F:I\to\mathbb{R}$ derivabilă pe I astfel ca $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in I$. În aceste condiţii, F se numeşte <u>primitivă a lui f pe I</u>.

Teorema 1.4. (condiţie necesară de existenţă a primitivelor). *Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie care admite primitive pe I. Atunci f are proprietatea lui Darboux pe I.*

Consecinţa 1.5. Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie care nu are proprietatea lui Darboux pe I. Atunci f nu admite primitive pe I.

Teorema 1.6 (o condiţie suficientă de existenţă a primitivelor). *Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă pe I. Atunci f admite primitive pe I. Mai precis, funcţia $F:I\to\mathbb{R}$*

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt,\quad \forall x\in I,\quad x_0\in\mathbb{R},\ (F(x_0)=0)$$

este o primitivă a lui f pe I.

2. Ne propunem să punem în evidenţă o clasă largă de funcţii discontinue care admit primitive. În cele ce urmează, vom nota cu M(R) următoarea mulţime:

$M(\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ /\ f$ continuă şi f satisface $(*)\}$

$$(*)\qquad \lim_{|y|\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y f(t)\,dt = M(f) = finit$$

(M(f) = media Cesaró a funcţiei f)

Propoziţia 2.1 Mulţimea $M(\mathbb{R})$ este un spaţiu vectorial real în raport cu adunarea funcţiilor şi înmulţirea funcţiilor cu scalar.

Demonstraţie Oricare ar fi $f,g\in M(\mathbb{R})$ şi $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$ avem:

$$\lim_{|y|\to\infty} \frac{1}{y}\int_0^y [(\alpha f)(t)+(\beta g)(t)]\ dt=$$

$$=\lim_{|y|\to\infty} [\alpha\frac{1}{y}\int_0^y f(t)\,dt+\beta\frac{1}{y}\int_0^y g(t)\,dt]=$$

$$=\lim_{|y|\to\infty} \frac{1}{y}\int_0^y f(t)\,dt + \beta \lim_{|y|\to\infty} \frac{1}{y}\int_0^y g(t)\,dt=$$

$$\alpha M(f)+\beta M(g) = finit$$

deci f+g verifică (*).

Cum suma a două funcții continue pe $\mathbb{R}$ este tot o funcție continuă pe $\mathbb{R}$ rezultă că $f+g\in M(\mathbb{R})$.

Teorema 2.2 *Dacă $f\in M(\mathbb{R})$ atunci funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,*

$$g(x)=\begin{cases} f(\frac{1}{x}), & daca\ \ x\neq 0 \\ M(f), & daca\ \ x=0 \end{cases}$$

admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Demonstrație Deoarece f este continuă pe $\mathbb{R}$, rezultă că f are primitive pe $\mathbb{R}$. Fie

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(y) = \int_0^y f(t)\,dt$$

o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$.

Pentru $x\neq 0$, putem scrie:

$$(x^2 F(\frac{1}{x}))' = 2x\,F(\frac{1}{x}) - F'(\frac{1}{x}) = 2x\,F(\frac{1}{x}) - f(\frac{1}{x}) \quad deci$$

$$f(\frac{1}{x}) = 2x\,F(\frac{1}{x}) - (x^2F(\frac{1}{x}))' \qquad (1)$$

Considerăm următoarele funcții:

$$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=\begin{cases} 2x\,F(\frac{1}{x}), & x\neq 0 \\ 2M(f), & x=0 \end{cases}$$

și

$$u:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad u(x)=\begin{cases}(x^2F(\frac{1}{x}))', & x\neq 0\\ M(f), & x=0\end{cases}$$

Atunci g = h-u.

Funcţia h este continuă pe $\mathbb{R}$. Într-adevăr avem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 2x\,F(\frac{1}{x}) = 2\lim_{y\to +\infty}\frac{1}{y}F(y) =$$

$$= 2\lim_{y\to +\infty}\frac{1}{y}\int_0^y f(t)\,dt = 2M(f) = h(0)$$

şi

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} h(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 2xF(\frac{1}{x}) = 2\lim_{y\to -\infty}\frac{1}{y}F(y) =$$

$$=2\lim_{y\to -\infty}\frac{1}{y}\int_0^y f(t)\,dt = 2M(f) = h(0)$$

deci este continuă pe $\mathbb{R}$ şi prin urmare h are primitive pe $\mathbb{R}$.

Fie H:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui h pe $\mathbb{R}$.

Funcţia u:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ admite ca primitivă pe U:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$U(x)=\begin{cases}x^2F(\frac{1}{x}) & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$

căci pentru x≠0 avem

$$U'(x) = (x^2F(\frac{1}{x}))' = u(x)$$

iar în x=0 avem

$$U'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{U(x)-U(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2F(\frac{1}{x})-0}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} xF(\frac{1}{x}) = \lim_{|y|\to +\infty}\frac{1}{y}F(y) =$$

$$= \lim_{|y|\to +\infty}\frac{1}{y}\int_0^y f(t)\,dt = M(f) = u(0)$$

Rezultă că funcţia g = h-u va avea ca primitivă pe G:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$G(x) = H(x) - U(x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, adică g admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Exemplul 2.3 Să se arate că funcţia $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases}\sin^2\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x} & ,x\neq 0\\ \frac{1}{2} & ,x=0\end{cases}$$

admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Considerăm funcţia $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2x - \sin x$.

Vom arăta că $f\in M(\mathbb{R})$, $M(f)=1/2$ şi apoi vom aplica teorema 2.2.

Avem:

$$\lim_{|y|\to\infty}\frac{1}{y}\int_0^y f(t)\,dt = \lim_{|y|\to\infty}\frac{1}{y}\int_0^y(\sin^2t - \sin t)\,dt =$$

$$=\lim_{|y|\to\infty}\frac{1}{y}\left[\frac{1}{2}(t-\sin 2t) + \cos t\right]\Big|_0^y =$$

$$=\lim_{|y|\to+\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\,\frac{\sin 2y}{y}+\frac{\cos y}{y} - \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2} = M(f)$$

Aplicăm teorema 2.2 şi rezultă că $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$g(x)=\begin{cases}f(\frac{1}{x}) & ,x\neq 0\\ M(f) & ,x=0\end{cases} = \begin{cases}\sin^2\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x} & ,\ x\neq 0\\ \frac{1}{2} & ,\ x=0\end{cases}$$

admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Vom nota în continuare:

$M([0,+\infty)] = \{f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}\ |$ f continuă şi există

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{y}\int_0^y f(t)\,dt = M(f) = \text{finit}\Big\}$$

Observaţia 2.4 Dacă $f\in M([0,+\infty))$ atunci funcţia $g: [0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$$g(x) =\begin{cases}f(\frac{1}{x}) & ,\ x>0\\ M(f) & ,\ x=0\end{cases}$$

admite primitive pe $[0,+\infty)$.

Observaţia 2.5. Dacă $f\in M((-\infty,0])$, atunci funcţia $g:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} f(\frac{1}{x}) & , x<0 \\ M(f) & , x=0 \end{cases}$$

admite primitive pe $(-\infty,0]$.

Teorema 2.6. *Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este continuă şi satisface condiţia (**):*

$$(**) \quad \lim_{|y|\to+\infty} \frac{1}{y}\int_{x_0}^{y} f(t)\,dt = M(f) = finit, x_0\neq 0$$

atunci funcţia $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} f(\frac{1}{x-x_0}) & , x\neq x_0 \\ M(f) & , x=x_0 \end{cases}$$

admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Demonstraţie. Deoarece f este continuă pe $\mathbb{R}$, ea admite primitive pe $\mathbb{R}$. Fie

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \quad x_0\in\mathbb{R},\ x_0\neq 0$$

o primitivă a sa.
Pentru $x\neq x_0$ avem

$$[(x-x_0)^2 F(\frac{1}{x-x_0})]' = 2(x-x_0)F(\frac{1}{x-x_0}) - F'(\frac{1}{x-x_0}) =$$
$$= 2(x-x_0)F(\frac{1}{x-x_0}) - f(\frac{1}{x-x_0}),$$

deci

$$f(\frac{1}{x-x_0}) = 2(x-x_0)F(\frac{1}{x-x_0}) - [(x-x_0)^2 F(\frac{1}{x-x_0})]'$$

Considerăm funcţiile:

$$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x) = \begin{cases} 2(x-x_0)F(\frac{1}{x-x_0}), & x\neq x_0 \\ 2M(f) & , x=x_0 \end{cases}$$

$$u:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ u(x)=\begin{cases}[(x-x_0)^2F(\frac{1}{x-x_0})]', & x\neq x_0\\ M(f) & ,x=x_0\end{cases}$$

Atunci g=h-u.

Funcţia h este continuă pe $\mathbb{R}$ pentru că în $x=x_0$ avem

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} h(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} 2(x-x_0)F(\frac{1}{x-x_0}) = \lim_{\substack{y\to+\infty\\ y\neq 0}} \frac{2}{y}F(y) =$$

$$=2\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y}\int_{x_0}^{y} f(t)\,dt = 2M(f) = h(x_0) \quad \text{și analog}$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} h(x) = 2M(f) = h(x_0)$$

Deci h admite primitive pe $\mathbb{R}$. Fie $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o primitivă a sa.

Pentru funcţia u, se constată direct că funcţia

$$U:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ U(x)=\begin{cases}(x-x_0)^2F(\frac{1}{x-x_0}) & ,x\neq x_0\\ 0 & ,x=x_0\end{cases}$$

este o primitivă pe $\mathbb{R}$. Într-adevăr, pentru $x\neq x_0$ avem

$$U'(x) = [(x-x_0)^2F(\frac{1}{x-x_0})]' = u(x)$$

iar în $x=x_0$ avem

$$U(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{U(x)-U(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)^2F(\frac{1}{x-x_0})-0}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} (x-x_0)F(\frac{1}{x-x_0}) = \lim_{|y|\to+\infty} \frac{1}{y}F(y) =$$

$$= \lim_{|y|\to+\infty} \frac{1}{y}\int_{x_0}^{y} f(t)\,dt = M(f) = u(x_0)$$

Rezultă că funcţia g=h-u va avea ca primitivă pe $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x) = H(x) - U(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

Observaţia 2.7. Fie $x_0\in\mathbb{R}^*$ şi $f:[x_0, +\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă. Dacă există şi este finită

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y}\int_{x_0}^{y} f(t)\,dt = M(f)$$

atunci funcţia g: $[x_0, +\infty)\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases} f\left(\frac{1}{x-x_0}\right) & , x>x_0 \\ M(f) & , x=x_0 \end{cases}$$

admite primitive pe $[x_0,+\infty)$.

Observaţia 2.8. Fie $x_0\in\mathbb{R}^*$ şi $f:(-\infty,x_0]\to\mathbb{R}$ o funcţie continuă. Dacă există şi este finită

$$\lim_{y\to-\infty} \frac{1}{y}\int_{x_0}^{y} f(t)\,dt = M(f)$$

atunci funcţia g: $(-\infty,x_0]\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases} f\left(\frac{1}{x-x_0}\right) & , x<x_0 \\ M(f) & , x=x_0 \end{cases}$$

admite primitive pe $(-\infty,x_0]$.

Exemplul 2.9. Să se arate că funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases} 4\cos^2\frac{\pi}{x-3}+5, & x\neq3 \\ 7 & , x=3 \end{cases}$$

admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Considerăm funcţia

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = 4\cos^2\pi x+5$$

şi fie $x_0=3$. f este continuă pe $\mathbb{R}$ şi avem

$$\lim_{|y|\to+\infty}\frac{1}{y}\int_3^y f(t)\,dt=\lim_{|y|\to+\infty}\frac{1}{y}\int_3^y(4\cos^2\pi t+5)\,dt=$$

$$=\lim_{|y|\to+\infty}\frac{1}{y}\int_3^y[2(1-\cos 2\pi t)+5]\,dt=$$

$$=\lim_{|y|\to+\infty}\frac{1}{y}\left[7t-\frac{1}{\pi}\sin 2\pi t\right]\Big|_3^y=$$

$$=\lim_{|y|\to+\infty}\frac{1}{y}\left[7y-\frac{1}{\pi}\sin 2\pi y-21+\frac{1}{\pi}\sin 6\pi\right]=$$

$$=\lim_{|y|\to+\infty}\left(7-\frac{\sin 2\pi y}{\pi y}-\frac{21}{y}\right)=7=M(f)$$

Aplicînd teorema 2.6 deducem că funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases} f\left(\frac{1}{x-3}\right), & x\neq 3\\ 7, & x=3\end{cases}=$$

$$=\begin{cases} 4\cos^2\frac{\pi}{x-3}+5, & x\neq 3\\ 7, & x=3\end{cases}$$

are primitive pe $\mathbb{R}$.

Observaţia 2.10. Dacă $f\in C^1(\mathbb{R})$ şi dacă există şi este finită

$$\lim_{|y|\to\infty}\frac{f(y)}{y}=m(f),$$

atunci $f'\in M(\mathbb{R})$.

Într-adevăr avem

$$M(f')=\lim_{|y|\to\infty}\frac{1}{y}\int_0^y f'(x)\,dx=\lim_{|y|\to\infty}\frac{f(y)}{y}=m(f)$$

De aici se deduce că funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases} f'\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ m(f), & x=0\end{cases}$$

admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Exemplul 2.11. Să se arate că funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$

admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Considerăm funcţia

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ,f(x)=\sqrt[3]{x}\sin x$$

care este derivabilă cu derivata continuă pe $\mathbb{R}$ şi

$$f'(x)=\frac{1}{3}\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\sin x+\sqrt[3]{x}\cos x$$

Observăm că $g(x)=f'(1/x)$, pentru $x\neq 0$.

În plus, avem:

$$\lim_{|y|\to\infty}\frac{f(y)}{y}=\lim_{|y|\to\infty}\frac{\sqrt[3]{y}\sin y}{y}=$$
$$=\lim_{|y|\to\infty}\frac{\sin y}{\sqrt[3]{y^2}}=0=m(f)$$

de unde deducem că funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases}f'(\frac{1}{x}) & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\cos\frac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$

admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Observaţia 2.12. Fie $x_0\in\mathbb{R}^*$. Dacă $f\in C^1(\mathbb{R})$ şi dacă există şi este finită

$$\lim_{|y|\to\infty}\frac{f(y)}{y}=m(f)$$

atunci funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases}f'(\frac{1}{x-x_0}) & ,x\neq x_0\\ m(f) & ,x=x_0\end{cases}$$

admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Exemplul 2.13. Să se arate că funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases} -e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}\left(2\cos\frac{1}{x-1}+\sin\frac{1}{x-1}\right) & ,x\neq 1 \\ 0 & ,x=1 \end{cases}$$

admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Considerăm funcţia

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = e^{-x^2}\cos x$$

care este derivabilă cu derivata continuă pe $\mathbb{R}$. Avem

$$f'(x) = -e^{-x^2}(2x\cos x + \sin x)$$

şi

$$\lim_{|y|\to\infty}\frac{f(y)}{y} = \lim_{|y|\to\infty}\frac{e^{-y^2}}{y}\cos y =$$
$$= \lim_{|y|\to\infty}\frac{1}{ye^{y^2}}\cos y = 0 = m(f)$$

Deducem că funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases} f'\left(\frac{1}{x-1}\right) & ,x\neq 1 \\ m(f) & ,x=1 \end{cases} =$$

$$=\begin{cases} -e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}\left(2\cos\frac{1}{x-1}+\sin\frac{1}{x-1}\right) & ,x\neq 1 \\ 0 & ,x=1 \end{cases}$$

are primitive pe $\mathbb{R}$.

În continuare vom da condiţii suficiente pentru apartenenţa unei funcţii la clasa $M(\mathbb{R})$. Vom arăta că mulţimea $M(\mathbb{R})$ conţine clasa funcţiilor continue f cu proprietatea că există

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x)$$

şi este finită, notată cu $A(\mathbb{R})$; clasa $AP(\mathbb{R})$ a funcţiilor aproape periodice, precum şi clasa $P(\mathbb{R})$ a funcţiilor continue şi periodice pe $\mathbb{R}$.

Fie deci

$A(\mathbb{R}) = \{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f$ continuă şi există $\lim\limits_{|y|\to+\infty} f(y) = l(f)$ = finită$\}$

Teorema 2.14. *Are loc incluziunea:*

$$A(\mathbb{R}) \subset M(\mathbb{R})$$

Demonstraţie Fie $f\in A(\mathbb{R})$. Aplicînd regula lui l'Hospital obţinem

$$\lim_{|y|\to\infty} \frac{1}{y}\int_0^y f(x)\,dx = \lim_{|y|\to\infty} f(y) = l(f) = \textit{finită}$$

deci $f\in M(\mathbb{R})$.

Observaţia 2.15. Incluziunea $A(\mathbb{R})\subset M(\mathbb{R})$ este strictă. Funcţia $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $u(x)=\cos x$ aparţine clasei $M(\mathbb{R})$ dar nu face parte din $A(\mathbb{R})$. Într-adevăr

$$M(u) = \lim_{|y|\to\infty} \frac{1}{y}\int_0^y \cos x\,dx = \lim_{|y|\to\infty} \frac{\sin y}{y} = 0$$

dar $l(u)$ nu există.

Exemplul 2.16. Să se arate că funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \sin\frac{1}{x^3} & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$$

are primitive pe $\mathbb{R}$.

Considerăm funcţia

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ,\ f(x) = e^{-x^2}\sin x^3$$

Avem

$$l(f) = \lim_{|y|\to\infty} e^{-y^2}\sin y^3 = 0$$

deci $f\in A(\mathbb{R})$. Pe baza teoremei 2.2 rezultă că g admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Reamintim acum cîteva rezultate şi noţiuni legate de funcţiile aproape periodice.

Definiţia 2.17. Se numeşte polinom trigonometric o expresie de forma:

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos\lambda_k x + b_k \sin\lambda_k x)$$

$$\text{unde } a_0,\ a_k\ ,b_k\ ,x_k \in \mathbb{R},\quad k=1,2,\ldots,n$$

Definiţia 2.18. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ se numeşte <u>aproape - periodică pe $\mathbb{R}$</u> dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există un polinom trigonometric T_ε astfel încît:

$$|f(x) - T_\varepsilon(x)|\ ,\quad \forall\ x\in\mathbb{R}$$

Notăm cu AP($\mathbb{R}$) = mulţimea funcţiilor aproape periodice pe $\mathbb{R}$.
P($\mathbb{R}$) = mulţimea funcţiilor continue şi periodice pe $\mathbb{R}$.
Conform teoremei de aproximare a lui Weierstrass ([10]) rezultă că orice funcţie continuă şi periodică este şi aproape periodică, adică are loc incluziunea AP($\mathbb{R}$)$\subset$P($\mathbb{R}$).
Incluziunea contrară nu are loc, după cum arată următorul exemplu:

Exemplul 2.19. Funcţia

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x) = \cos x + \cos\sqrt{2x}$$

este aproape periodică, dar nu este periodică. Faptul că f este aproape periodică este evident, deoarece putem alege

$$T_\varepsilon(x) = \cos x + \cos\sqrt{2x}$$

Dacă prin absurd f ar fi periodică, ar exista T>0 astfel încît $f(x+T) = f(x),\ \forall\ x\in\mathbb{R}$, deci

$$\cos(x+T) + \cos\sqrt{2}(x+T) = \cos x + \cos\sqrt{2}x,\quad \forall\ x\in\mathbb{R}$$

Luăm x=0 şi obţinem $\cos T+\cos\sqrt{2}T = 2$ adică $\cos T = \cos\sqrt{2}T = 1$, de unde $T = 2k\pi$, $\sqrt{2}T = 2l\pi$, $k,l\in Z^*$. Rezultă $\sqrt{2} = l/k\in Q$ imposibil.
Alte proprietăţi ale funcţiilor aproape-periodice sînt date în [5].
În [1] se demonstrează şi următoarele rezultate:

Teorema 2.20 *Are loc incluziunea*:

$$AP(\mathbb{R}) \subset M(\mathbb{R})$$

Consecinţa 2.21. Dacă f$\in$($\mathbb{R}$) are perioada T>0, atunci

$$f\in M(\mathbb{R}) \quad \text{și} \quad M(f) = \lim_{|y|\to\infty} \frac{1}{y}\int_0^y f(x)\,dx = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx$$

Observația 2.22. Incluziunea $AP(\mathbb{R})\subset M(\mathbb{R})$ este strictă. Funcția

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \frac{2x}{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}\sin x + (x^2+1)\cos x =$$

$$= [(x^2+1)^{\frac{1}{3}}\sin x]'$$

aparține lui $M(\mathbb{R})$ căci

$$\lim_{|y|\to\infty} \frac{1}{y}\int_0^y f(x)\,dx = \lim_{|y|\to\infty} \frac{1}{y}(y^2+1)^{\frac{1}{3}}\sin y = 0 = M(f)$$

Pe de altă parte, considerînd șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n=2n\pi$, avem $f(x_n) = 4n^2\pi^2 + 1 \to\infty$, $n\to\infty$. Prin urmare, f nu este mărginită, deci $f\notin AP(\mathbb{R})$.

3. <u>Proprietatea lui Darboux și existența primitivelor</u>

Am văzut că proprietatea lui Darboux este o condiție necesară pentru existența primitivelor unei funcții reale (teorema 1.4).

O consecință interesantă a acestei teoreme este următoarea:

Teorema 3.1. *Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval, $f_0:I\to\mathbb{R}$ o funcție care admite primitive pe I, iar $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție pentru care mulțimea*

$$(1) \qquad D = \{ x\in I \mid f(x) \neq f_0(x)\}$$

este nevidă și cel mult numărabilă. Atunci f nu admite primitive pe I.

Demonstrație. Presupunem prin absurd că f are primitive pe I. Atunci $f-f_0$ admite asemenea primitive pe I, și deci are proprietatea lui Darboux pe I. Rezultă că mulțimea $(f-f_0)(I)$ este un interval. Deoarece mulțimile D și $I\setminus D$ sînt nevide, funcția $f-f_0$ nu este constantă și de aceea intervalul $(f-f_0)(I)$ este nedegenerat. El este deci o mulțime infinită nenumărabilă.

Pe de altă parte, ținînd cont că $(f-f_0)(D)$ este cel mult numărabilă, se deduce din egalitatea

$$(f-f_0)(I) = \{0\} \cup (f-f_0)(D)$$

că $(f-f_0)$ este cel mult numărabilă. Contradicţia la care am ajuns arată că f nu posedă primitive pe $\mathbb{R}$.

Consecinţa 3.2. Fie $I\subset\mathbb{R}$ interval, $f_0:I\to\mathbb{R}$ o funcţie care admite primitive pe I, iar $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie pentru care există o mulţime $E\subset I$ cel mult numărabilă astfel încît

$$(2) \qquad f(x) = f_0(x) \quad ,\forall\, x\in I\setminus E$$

Atunci funcţia f admite primitive pe I dacă şi numai dacă

$$(3) \qquad f(x) = f_0(x) \quad ,\forall\, x\in E$$

Demonstraţie. Necesitatea. Presupunem că există un punct $x\in E$ astfel ca $f(x) \neq f_0(x)$. Atunci mulţimea D definită în (1) este neoidă. Cum $D\subset E$ rezultă că D este cel mult numărabilă. Ţinînd seama că f_0 admite primitive pe I, rezultă în baza teoremei 3.1 că f nu admite primitive pe I.

Suficienţa. Presupunem că are loc (3). Din (2) rezultă că $f=f_0$ şi cum f_0 are primitive pe I rezultă că şi f are primitive pe I.

Exemplul 3.3. Să se arate că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & ,x\neq 0 \\ a & ,x=0 \end{cases}$$

admite primitive pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $a=0$.

Considerăm funcţia $f_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f_0(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

Funcţia f_0 posedă primitive pe $\mathbb{R}$ căci funcţia $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=\sin x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ aparţine clasei $M(\mathbb{R})$, $M(f_1)=0$ şi

$$f_0(x) = \begin{cases} f_1(\frac{1}{x}) & , x\neq 0 \\ M(f_1) & , x=0 \end{cases}$$

şi aplicăm teorema 2.2.

Întrucît $f(x)=f_0(x)$ pentru orice $x\neq 0$, deducem că f are primitive dacă şi numai dacă $f(0)=f_0(0)$. Cu alte cuvinte, f are primitive dacă şi numai dacă $a=0$.

Exemplul 3.4. Să se arate că funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}(x+e^x)^{\frac{1}{x}} & , x>0\\ a & , x=0\end{cases}$$

admite primitive pe $[0,+\infty)$ dacă şi numai dacă $a=e^2$.

Observăm că pentru $x>0$ avem:

$$(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=e\left(1+\frac{x}{e^x}\right)^{\frac{1}{x}}=e\left[\left(1+\frac{x}{e^x}\right)^{\frac{e^x}{x}}\right]^{\frac{1}{e^x}}$$

de unde rezultă că

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=e^2$$

Funcţia $f_0:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f_0(x)=\begin{cases}(x+e^x)^{\frac{1}{x}} & , x>0\\ e^2 & , x=0\end{cases}$$

este continuă pe $[0,+\infty)$, deci admite primitive pe $[0,+\infty)$.

Cum $f(x)=f_0(x)$, pentru orice $x>0$ se deduce, pe baza consecinţei 3.2. că f are primitive dacă şi numai dacă $f(0)=f_0(0)$.

Cu alte cuvinte, f are primitive pe $[0,+\infty)$ dacă şi numai dacă $a=e^2$.

Observaţia 3.5. Faptul că funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & , x\neq 0\\ 1 & , x=0\end{cases}$$

are proprietatea Darboux pe $\mathbb{R}$ (vezi [4]), dar nu are primitive pe $\mathbb{R}$, ne arată că proprietatea lui Darboux nu este o condiţie suficientă pentru existenţa primitivelor unei funcţii reale.

Consecinţa 1.5. a teoremei 1.4. şi anume faptul că funcţiile care nu au proprietatea lui Darboux nu pot avea primitive, este utilă la demonstrarea non-existenţei primitivelor unor funcţii cu discontinuități de speța I.

Exemplul 3.6. Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & , x\in Q \\ 2^x & , x\in\mathbb{R}|Q \end{cases}$$

nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

Arătăm că f nu are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.

Presupunem prin absurd că f are proprietatea lui Darboux. Deoarece $f(0)=1$, $f(1)=3$ rezultă că pentru orice $\lambda\in(1,3)$ există $x_0\in(0,1)$ astfel ca $f(x_0)=\lambda$.

Pe de altă parte dacă $\lambda\in(2,3)\setminus Q$ ecuația $f(x)=\lambda$ nu are nici o soluție. Într-adevăr, dacă $x\in(0,1)\cap Q$ atunci $f(x)=x^2+x+1\in Q$ iar dacă $x\in(0,1)\setminus Q$ atunci $f(x)=2^x<2<\lambda$ deci oricare ar fi $x\in(0,1)$ avem $f(x)\neq\lambda$, $\lambda\in(2,3)\setminus Q$.

Contradicția la care am ajuns arată că f nu are proprietatea lui Darboux, deci f nu posedă primitive.

Exemplul 3.7. Fie $P\in\mathbb{R}[x]$ un polinom nenul cu coeficienți reali $I\subset\mathbb{R}$ un interval și $f:I\to\mathbb{R}$ o funcție neconstantă cu proprietatea că $(P\circ f)(x)=0$, $\forall x\in I$. Să se arate că f nu admite primitive pe I.

Fie $A=\{x\in\mathbb{R}|P(x)=0\}$ mulțimea rădăcinilor lui P.

Deoarece P este nenul, mulțimea A este finită.

Din $(P\circ f)(x)=0$, $\forall x\in I$ rezultă că $f(I)\subset A$ deci $f(I)$ este o mulțime finită de unde rezultă că f nu are proprietatea lui Darboux. Deducem că f nu admite primitive pe $\mathbb{R}$.

În încheiere, recomand celor interesați să încerce să folosească aceste chestiuni în rezolvarea problemelor de existența primitivelor și, întrucît articolul de față nu epuizează tematica, să studieze și sursele bibliografice indicate.

BIBLIOGRAFIE

1. ANDRICA, D.: Asupra unei clase largi de funcții primitivabile, Gazeta Matematică, Perfecționare metodică și metodologică în matematică și informatică, 4(1986), 169-176.

2. BERINDE, V.: O clasă de funcţii discontinue primitivabile , Gazeta Matematică, 6(1989), 214-220.

3. BOBOC, N.; COLOJOARĂ I.: Elemente de analiză matematică, Manual pentru clasa a XII-a, Ed.Did. şi Ped., Bucureşti, 1982.

4. BRECKNER, W.: Funcţii cu proprietatea lui Darboux, Lucrările seminarului de "Didactica Matematicii", Univ. Babeş-Bolyai Cluj, Facultatea de matematică, vol.3, 1986-1987, 34-74.

5. CORDUNEANU, C.: Funcţii aproape periodice, Ed.Academiei R.P.R, 1961.

6. GANGA, M.: Teme şi probleme de matematică, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1991.

7. GAZETA MATEMATICĂ: colecţie 1975-1990.

8. MUNTEAN, I.: Asupra primitivabilităţii şi integrabilităţii funcţiilor continue I, II, Gazeta Matematică, Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, 2(1981), 60-67; 165-175.

9. MUNTEAN, I.: Primitive şi primitive generalizate, Lucrările seminarului de Didactica Matematicii, Univ. Babeş-Bolyai Cluj, Facultatea de matematică, 1985-1986, 129-152.

10. NICOLESCU, M.: Analiză matematică, vol.I, II, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1958.

11. PĂLTĂNEA, E.: O clasă de funcţii care admit primitive, Gazeta Matematică, Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, 3-4(1982), 137-146.

12. ŞIREŢCHI, GH.: Calcul diferenţial şi integral, I, II, Ed.Şt.şi Enciclop., Bucureşti, 1985.

13. VULPESCU-JALEA, F.: Asupra unor funcţii primitivabile, Gazeta Matematică, Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, 3-4(1981), 159-166.

14. VÎJÎITU, M.: Funcţii periodice şi primitive, Gazeta matematică, Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, 4(1990), 172-175.

UNIVERSITATEA DIN BAIA MARE
FACULTATEA DE LITERE ŞI ŞTIINŢE