Universitatea din Baia Mare
Lucrările Seminarului de creativitate matematică,
Vol.1(1991-1992), pag.125-131

CARACTERIZĂRI ALE FUNCŢIILOR CU PROPRIETATEA LUI DARBOUX. APLICAŢII

Iulian COROIAN

1. INTRODUCERE

Funcţiile cu proprietatea lui Darboux pe un interval $I\subset\mathbb{R}$ constituie o clasă de funcţii foarte importantă, cu numeroase aplicaţii. În prezenta notă, vom prezenta succint principalele proprietăţi ale funcţiilor avînd proprietatea lui Darboux şi apoi plecînd de la cîteva exemple se vor da două propoziţii de caracterizare a funcţiilor cu proprietatea lui Darboux care constituie teoreme de prelungire a unei funcţii cu păstrarea proprietăţii lui Darboux, deasemenea cîteva exemple ilustrative, unele luate chiar din manualele de analiză matematică pentru clasele a XI-a şi a XII-a.

Pentru profesorii care predau analiza matematică la licee, funcţiile cu proprietatea lui Darboux le oferă posibilitatea de a aduce contribuţii la consolidarea unor noţiuni de bază ale analizei şi dezvoltarea capacităţii elevilor de a aborda o serie de probleme, în special la concursurile de matematică.

2. FUNCŢII CU PROPRIETATEA LUI DARBOUX

Definiţia 2.1 (vezi [2]) Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval (de orice fel) şi $f:I\to\mathbb{R}$ o funcţie. Spunem că f are proprietatea lui Darboux pe I (sau propritatea valorilor intermediare pe I) dacă pentru orice $a,b\in I$, $a<b$ şi orice λ cuprins între f(a) şi f(b), există $c\in(a,b)$ aşa ca $f(c)=\lambda$.

Observaţia 2.1. Definiţia exprimă că$(\forall)a,b\in I\Rightarrow(f(a),f(b))\subset f((a,b))$.

Vom nota în cele ce urmează cu $D_a(I)$ - mulţimea funcţiilor care au proprietatea lui Darboux pe I, şi peste tot I va fi un

interval nedegenerat (cu cel puţin 2 puncte).
Următoarele propoziţii, ale căror demonstraţii simple se găsesc în [5], pag.121, ne vor releva utilitatea şi importanţa clasei de funcţii $D_a(I)$.

Teorema 2.1 *Afirmaţiile următoare sînt echivalente:*
(i) $f \in D_a(I)$,
(ii) $(\forall) J$ *un interval* $J \subset I$, $f(J)$ *este un interval din* $\mathbb{R}$,
(iii) $\forall A$ *o mulţime convexă,* $A \subset I$ *rezultă că* $f(A)$ *e convexă.*

Teorema 2.2 *Dacă* $f \in D_a(I)$ *şi* f *e injectivă atunci* f *este strict monotonă.*

Corolar 1. Dacă $f \in D_a(I)$ atunci f e strict monotonă dacă şi numai dacă f e injectivă.

Teorema 2.3 *Fie* $f: \to \mathbb{R}$, f *continuă adică* $f \in \mathbf{C}(I)$. *Atunci* $f \in D_a(I)$, adică $\mathbf{C}(I) \subset D_a(I)$.
Demonstraţia se găseşte şi în [1], pag.111.
Reciproca acestei teoreme nu este în general adevărată, deci există funcţii cu proprietatea lui Darboux care sînt discontinue, aşa cum se poate vedea din exemplul care urmează:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{3}, & x = 0 \end{cases}$$

Teorema 2.4 *Dacă* $f \in D_a(I)$, *atunci* f *nu poate avea puncte de discontinuitate de speţa întîia.*

Demonstraţie. Presupunem că $x_0 \in I$ aşa ca să existe limita la stînga $f(x_0-0)$ finită şi $f(x_0-0) \neq f(x_0)$, adică x_0 ar fi un punct de discontinuitate de speţa I-a. Fie de exemplu $f(x_0-0) < f(x_0)$. Atunci există $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(x_0-0) < \alpha < f(x_0)$. Din $f(x_0-0) < \alpha$ se deduce că există V o vecinătate a lui x_0 aşa ca pentru $x < x_0$ şi $x \in V \cap I$ să avem $f(x) < \alpha$. Fie a un asemenea număr, adică $a < x_0$, $a \in V \cap I$, $f(a)\alpha < f(x_0)$. Aşadar pentru orice $x \in (a, x_0)$ avem $x \in V \cap I$ şi $f(x) < \alpha$. Deci funcţia f nu ia valoarea α în nici un punct $x \in (a, x_0) \subset I$.
Acest lucru contrazice faptul că $f \in D_a(I)$ şi astfel presupunerea făcută e falsă.

Corolar 1. Dacă $f: I \to \mathbb{R}$ are un punct de discontinuitate de speţa I-a, $x_0 \in I$ atunci $f \notin D_a(I)$.

Corolar 2. Dacă $f:I\to\mathbb{R}$ are cel puţin un punct de discontinuitate de speţa I-a, $x_0\in I$, atunci f nu admite primitive pe I.

În adevăr, în caz contrar f ar avea proprietatea lui Darboux şi atunci contrazicem Corolarul 1. Cu ajutorul acestui corolar rezultă imediat soluţia următoarelor exerciţii din [2], II, exerciţiile 9 şi 10, pagina 13.

Se cere să se arate că următoarele funcţii nu admit primitive:

$$9.\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$$10.\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{tg\, x}{x}, & x\neq 0,\\ -1, & x=0\end{cases}$$

Se observă imediat că la ambele funcţii punctul $x_0=0$ este punct de discontinuitate de speţa I-a şi atunci pe baza corolarului 2 aceste funcţii nu admit primitive.

În încheierea acestui paragraf mai dăm

Teorema 2.5 (Darboux). *Dacă $f:I\subset\mathbb{R}$, I-interval, este derivabilă pe I, atunci derivata f' are proprietatea lui Darboux pe I.*

Demonstraţia se găseşte în [5].

3. Două probleme care conduc la generalizări

Problema 3.1 Fie funcţia $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x\in(0,\infty),\\ r & ,x=0,\ r\in\mathbb{R}\end{cases}$$

Ce condiţii trebuie să îndeplinească r pentru ca f să aibă proprietatea lui Darboux pe $[0,\infty)$?

Problema 3.2 Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ prin

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax}\sin\frac{1}{x}\ ; & x\neq 0,\ a\in\mathbb{R}, \\ r, & x=0, \quad r\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Ce condiţii trebuie să îndeplinească r pentru ca $f\in D_a(\mathbb{R})$?
Cele 2 probleme se pot formula unitar astfel:

Problema 3.3 Fie $I\subset\mathbb{R}$ un interval, $x_0\in I$ şi $f_0:I\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ o funcţie dată. Dîndu-se $f:I\to\mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x), & x\in I\setminus x_0, \\ r, & x=x_0, \quad r\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

Ce condiţii trebuie să satisfacă $r\in\mathbb{R}$ pentru ca $f\in D_a(I)$?

Observaţia 3.1 Deosebirea esenţială între problema 3.1 şi problema 3.2 este că în primul caz $x_0\notin$ int I şi deci $I\setminus\{x_0\}$ rămîne interval iar la a doua problemă $x_0\in$int I şi deci $I\setminus\{x_0\}$ nu mai este interval.

Astfel vom avea pentru soluţia problemei 3.3 două moduri de abordare în funcţie de faptul că $x_0\in$int I sau $x_0\notin$int I.

Propoziţia 3.1 *Fie $x_0\in I\setminus$int I şi funcţia f definită în problema 3.3. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

1° $f\in D_a$ (I)

2° $f_0\in D_a(I\setminus\{x_0\})$ şi există un şir (x_n), $x_n\in I\setminus\{x_0\}$,
$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$ aşa ca $f_0(x_n)\longrightarrow r$.

Demonstraţia se deduce cu Propoziţia 5.5.20, pag.171 din [5].
Să aplicăm propoziţia 3.1 la rezolvarea problemei 3.1. Presupunem că $f\in D_a([0,\infty))$. Evident că

$$f_0(x) = \sin\frac{1}{\sqrt{x}}$$

are proprietatea lui Darboux pe $I\setminus\{x_0\}=(0,\infty)$ căci este continuă. După teorema 3.1 există un şir (x_n), $x_n\in(0,\infty)$ cu $\lim x_n=0$ şi

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{x_n}} = r$$

$$Cum\ \left|\sin\frac{1}{\sqrt{x_n}}\right|\le 1\ deducem\ ca\ |r|\le 1$$

Reciproc dacă $|r|\le 1$, să arătăm că $f\in D_a[0,\infty)$.
Arătăm că are loc 2°. În adevăr

$$f_0(x) = \sin\frac{1}{\sqrt{x}}\in D_a((0,\infty))$$

Să considerăm şirul

$$(x_n),\ x_n = \frac{1}{(2n\pi+\arcsin r)^2}$$

Evident că $x_n\in(0,\infty)$ şi $x_n \longrightarrow 0$.

$$f(x_n) = \sin\frac{1}{\sqrt{x_n}} = \sin(2n\pi+\arcsin r) = \sin(\arcsin r) = r$$

şi astfel că $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} r$.
Pe baza propoziţiei 3.1 se deduce că 2°⇒1° adică f are proprietatea lui Darboux pe $[0,\infty)$.
În cazul în care $x_0\in\operatorname{int} I$ se poate demonstra

Propoziţia 3.2 *Fie $x_0\in\operatorname{int} I$ şi f funcţia definită la problema 3.3. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

1° $f\in D_a(I)$

2° (i) $f_0\in D_a(I\cap(-\infty,x_0))$, $\exists(x_n)$, $x_n\in(-\infty,x_0)$, $x_n\to x_0$ *aşa ca* $f(x_n)\to r$ *şi*
(ii) $f_0\in D_a(I\cap(x_0,\infty))$, $\exists(y_n)$, $y_n\in(x_n,\infty)$, $y_n\to x_n$ *aşa ca* $f(y_n)\to r$.

Să aplicăm propoziţia 3.2 la rezolvarea problemei 3.2.

Presupunem că $f\in D_a(\mathbb{R})$. Atunci după propoziţia 3.2, 1°⇒2°, deci $\exists\ x_n\in(-\infty,0)$, $x_n\to 0$ şi

$$f(x_n) = e^{ax_n}\sin\frac{1}{x_n}\longrightarrow r$$

Dar

$$\left|e^{ax_n}\sin\frac{1}{x_n}\right|\le e^{ax_n}\longrightarrow 1$$

Se deduce că $|r|\le 1$.
Invers, presupunînd că $|r|\le 1$ să arătăm că f are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$. Pentru aceasta verificăm îndeplinirea condiţiei 2°.

adică (i) şi (ii) din propoziţia 3.2.

$$f_0(x) = e^{ax}\sin\frac{1}{x}$$

are proprietatea lui Darboux şi pe $(-\infty,0)$ şi pe $(0,\infty)$, fiind continuă.
Fie

$$\alpha = \arcsin r \quad si \quad x_n = \frac{1}{\alpha-2n\pi},\ y_n = \frac{1}{\alpha+2n\pi}$$

Este clar că $x_n \in (-\infty,0)$, $x_n \longrightarrow 0$ şi

$$f(x_n) = e^{\frac{a}{\alpha-2n\pi}}\sin(\alpha-2n\pi) = e^{\frac{a}{\alpha-2n\pi}}r \longrightarrow e^0 \cdot r = r$$

La fel $y_n \in (0,\infty)$, $y_n \longrightarrow 0$ şi $f(y_n) \longrightarrow r$.
Atunci conform propoziţiei 3.2 deducem că f are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.

Observaţia 3.1 Propoziţiile 3.1 şi 3.2 pot fi privite ca fiind nişte teoreme de prelungire a unei funcţii cu păstrarea proprietăţii lui Darboux. Astfel propoziţia 3.1 se poate reformula astfel:

Propoziţia 3.1' Dacă $I \subset \mathbb{R}$ este un interval, $x_0 \in I \setminus \text{int } I$ şi $f_0 \in D_a(I\setminus\{x_0\})$, atunci există $f:I \to \mathbb{R}$, $f \in D_a(I)$ şi $f|_{I\setminus\{x_0\}} = f_0$ dacă şi numai dacă există un şir (x_n), $x_n \in I\setminus\{x_0\}$, $x_n \to x_0$ iar şirul $(f_0(x_n))$ să fie mărginit (căci din acest şir se poate extrage un subşir convergent către valoarea prelungirii în x_0).

Observaţia 3.2 Privind operaţiile cu funcţii care au proprietatea lui Darboux menţionăm că în general dacă $f,g \in D_a(I)$ atunci $f+g$, $f \cdot g$ şi f/g nu au proprietatea lui Darboux cum se poate vedea pe cîteva exmple.
De exemplu pentru sumă. Fie f, $g:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ date prin

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{\sqrt{x}}, & x>0 \\ -\frac{1}{2} & ,x=0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -\sin\frac{1}{\sqrt{x}}, & x>0 \\ -\frac{1}{2}, & x=0 \end{cases}$$

Se observă uşor aplicînd propoziţia 3.1 că f şi g au proprietatea lui Darboux; dar suma lor $f+g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 0, & x>0 \\ -1, & x=0, \end{cases}$$

nu are proprietatea lui Darboux.
Analog se pot găsi exemple care să ilustreze că $f\cdot g$ şi f/g nu au propritatea lui Darboux în general.

BIBLIOGRAFIE

1. BRECKNER, W.: Funcţii cu proprietatea lui Darboux, Lucrările Seminarului de Didactica Matematicii de la Facultatea de Matematică a Universităţii din Cluj-Napoca, vol.3, 1986-1987, p.34-74.

2. Elemente de analiză matematică, anual pentru cl. a XI-a, Editura Didactică şi Pedagogică, 1988.

3. Elemente de analiză matematică, Manual pentru cl. a XII-a, Editura Didactică şi Pedagogică, 1982.

4. Gazeta Matematică, Nr.3, 1986, p.77.

5. SIREŢCHI, Gh.: Calcul diferenţial şi integral, vol. I, II, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.

UNIVERSITATEA DIN BAIA MARE
FACULTATEA DE LITERE ŞI ŞTIINŢE