Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.2(1992-1993), 1-23

PRINCIPIUL PUNCTULUI FIX APLICAT LA REZOLVAREA SISTEMELOR CIRCULARE

Vasile BERINDE

1. Introducere

Manualele şcolare familiarizează elevii cu metode universale de rezolvare a sistemelor liniare (metoda reducerii, metoda substituţiei, regula lui Cramer) şi cu metode specifice de rezolvare a două clase de sisteme de două ecuaţii neliniare cu două necunoscute: sistemele simetrice şi sistemele omogene.

Întrucât la concursurile de matematică precum şi în revistele de specialitate apar frecvent sisteme de trei sau mai multe ecuaţii neliniare, pentru care se indică în general doar metode bazate pe diverse artificii - specifice fiecărei probleme în parte - în această lucrare ne propunem să prezentăm o metodă unitară de abordare a unei clase de astfel de sisteme, cea a *sistemelor circulare*.

Metoda noastră se bazează pe principiul punctului fix, instrument deosebit de puternic în matematicile superioare, pe care îl vom prezenta însă într-un cadru accesibil elevilor de liceu.

Pentru a evidenţia calităţile metodei noastre vom prezenta mai întâi, prin intermediul a trei exemple, câteva din metodele care au la bază efectuarea unor artificii.

2. Metode euristice de rezolvare a sistemelor circulare

Un sistem de n ecuaţii cu n necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numeşte *sistem circular* dacă prin orice permutare circulară a necunoscutelor în ecuaţiile sale obţinem, după o rearanjare a lor, acelaşi sistem.

În cazul n=2 sistemele circulare sunt de fapt sistemele simetrice studiate în clasa a IX-a.

Exemplul 1. ([5])

Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x = y+\dfrac{2}{y} \\ 2y = z+\dfrac{2}{z} \\ 2z = x+\dfrac{2}{x} \end{cases}$$ (Admitere Fac. de Matematică, 1981)

<u>Rezolvare</u>. Pentru acest tip de sisteme nu există o metodă generală de rezolvare, a se vedea [4] şi [5]. Cititorul se poate convinge uşor că metoda substituţiei nu poate fi aplicată (conduce la o ecuaţie de gradul 6!).

METODA 1.

Evident avem $x,y,z\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Dacă, spre exemplu, $x>0$, atunci din ecuaţia a treia rezultă $z>0$ şi apoi, din ecuaţia a doua, $y>0$.

Aşadar avem sau $x>0$, $y>0$, $z>0$ sau $x<0$, $y<0$, $z<0$.

Tratăm primul caz. Din inegalitatea

$$a^2+b^2 \geq 2ab\ ,$$

valabilă pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$, deducem pentru $a = \sqrt{y}$ si $b=\sqrt{\dfrac{2}{y}}$,

$$y+\frac{2}{y} \geq 2\sqrt{2}$$

care, ţinând seama de prima ecuaţie, ne dă $x\geq\sqrt{2}$.

Sistemul fiind circular, analog deducem $y \geq \sqrt{2}$ si $z \geq \sqrt{2}$.

Adunăm acum membru cu membru toate ecuaţiile sistemului şi obţinem

$$x+y+z = 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Cum $x>0$, $y>0$ şi $z>0$ rezultă

$$\frac{1}{x} \le \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{y} \le \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{z} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

deci

$$3\sqrt{2} \le x+y+z = 2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \le 2\cdot 3\cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

care impune

$$x+y+z = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow (x-\sqrt{2})+(y-\sqrt{2})+(z-\sqrt{2}) = 0 ,$$

şi cum în paranteze avem mărimi pozitive, egalitatea cu zero are loc dacă şi numai dacă $x=y=z=\sqrt{2}$, unica soluţie pozitivă a sistemului.

Dacă $x<0$, $y<0$, $z<0$, obţinem în mod analog soluţia $x=y=z=-\sqrt{2}$.
Aşadar sistemul are două soluţii

$$(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2}) \quad si \quad (-\sqrt{2},-\sqrt{2},-\sqrt{2}).$$

METODA 2.

Tratăm tot cazul $x>0$, $y>0$, $z>0$. Din prima ecuaţie obţinem

$$y^2-2xy+2 = 0$$

de unde, ţinând seama că $x\ge\sqrt{2}$, deci $\Delta_y=x^2-2\ge 0$,

obţinem

$$y_{1,2} = x\pm\sqrt{x^2-2}.$$

Deoarece pentru $x>\sqrt{2}$ avem $x-\sqrt{x^2-2}<\sqrt{2}$ $(\Leftrightarrow x-\sqrt{2}<\sqrt{x^2-2} \Leftrightarrow x^2-2\sqrt{2}x+2<$ $<x^2-2 \Leftrightarrow x>\sqrt{2})$ şi $y>\sqrt{2}$ acceptăm doar rădăcina

$$y = x+\sqrt{x^2-2} .$$

În mod analog obţinem

$$z = y+\sqrt{y^2-2}$$
$$x = z+\sqrt{z^2-2}.$$

Adunând aceste relaţii memebru cu membru rezultă

$$\sqrt{x^2-2} + \sqrt{y^2-2} + \sqrt{z^2-2} = 0,$$

care impune $x^2-2=0$, adică $x=\sqrt{2}$, ş.a.m.d.

Observaţie.

Amândouă metodele expuse aici pot fi utilizate la rezolvarea sistemului de aceeaşi formă dar având n necunoscute [5].

Exemplul 2.

Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} x^2+5x+4 = y \\ y^2+5y+4 = z \\ z^2+5z+4 = x \end{cases}$$ (Prelucrare după E:10349, G.M. 10/1991)

Rezolvare. Putem prelua de la Metoda 1 ideea însumării ecuaţiilor. Obţinem

$$x^2+4x+4+y^2+4y+4+z^2+4z+4 = 0$$

adică

$$(x+2)^2+(y+2)^2+(z+2)^2 = 0,$$

deci în mod necesar $x+2=0$, care dă $x=-2$, ş.a.m.d.

METODA 3.

Putem însă să prelucrăm direct ecuaţiile sistemului preluând din consideraţiile anterioare ideea restrângerii pătratului unui binom astfel că prima ecuaţie se scrie

$$(x+2)^2 = y-x$$

de unde deducem $y-x\geq 0$, adică $x\leq y$.

În mod analog deducem $y\leq z$ şi $z\leq x$, prin urmare

$$x \le y \le z \le x,$$

adică x=y=z. Din prima ecuație rezultă acum

$$x^2+5x+4 = x \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2, \textit{ etc.}$$

Observație. Cu amândouă metodele expuse aici se poate rezolva sistemul și în cazul a n>3 necunoscute.

Exemplul 3.

Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} x = \sqrt{y+45} - \sqrt{y+5} \\ y = \sqrt{z+45} - \sqrt{z+5} \\ z = \sqrt{x+45} - \sqrt{x+5} \end{cases}$$

(Prelucrare după pr.117, [1])

Rezolvare.

Nici una din metodele prezentate anterior nu poate fi aplicată cu succes în acest caz (cititorul se poate convinge!). Sugerăm tot cititorului să caute un artificiu adecvat acestui tip de sisteme circulare. Noi ne vom îndrepta atenția înspre găsirea unei *metode unitare* de rezolvare a acestor probleme, plecând de la ideea folosită în cazul metodei 3.

Dacă notăm, corespunzător exemplului 2, $f(x)=x^2+5x+4$, atunci sistemul poate fi scris sub forma

$$\begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = z \\ f(z) = x \end{cases} \tag{1}$$

și parcurgând metoda 2 observăm că în final am ajuns la rezolvarea ecuației

$$f(x) = x , \tag{2}$$

care este de fapt o problemă de *punct fix* și care ne-a furnizat soluția sistemului.

O astfel de abordare apare în [2] şi [3] dar acolo sunt date doar câteva criterii de excludere a punctelor fixe care nu sunt soluţii ale sistemului, fără a se aprofunda însă partea constructivă a metodei.

3. **Principiul punctului fix.**

În acest paragraf ne propunem să prezentăm, doar în cadrul restrâns al funcţiilor reale, elementele teoretice necesare reducerii oricărui sistem circular de tipul (1) la o ecuaţie de forma (2), dar informăm cititorul că această frumoasă teorie poate fi făcută într-un context mai general, a se vedea [7].

Definiţia 1.

Fie $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ o funcţie dată. Un număr $a \in A$ se numeşte *punct fix* al funcţiei f dacă

$$f(a) = a .$$

Notăm cu F_f mulţimea punctelor fixe ale unei funcţii f. Mulţimea F_f poate avea unul sau mai multe elemente, dar poate fi şi vidă după cum arată

Exemplul 4.

a) Funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2+5x+4$ are un singur punct fix, $F_f=\{-2\}$;

b) Funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x$ are două puncte fixe, $F_f=\{0,2\}$;

c) Funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x+2$ nu are nici un punct fix, $F_f=\emptyset$.

Interpretare geometrică

Pentru funcţiile reale, considerate de noi în această lucrare, mulţimea F_f coincide cu mulţimea punctelor din plan în care graficul funcţiei taie prima bisectoare a axelor de coordonate, căci ecuaţia (2) este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} y = x \\ y = f(x) . \end{cases}$$

Este clar că pentru funcţia identică $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x$, avem $F_f=\mathbb{R}$. Fie, în continuare, $A \subset \mathbb{R}$ şi $f: A \to \mathbb{R}$, o funcţie dată. Notăm

$$f^n = \underbrace{f\circ f\circ \ldots \circ f}_{n\ ori}$$

Ne vor fi utile câteva proprietăţi ale mulţimii punctelor fixe.

Propoziţia 1.

Dacă $a\in F_f$, atunci $a\in F_{f^n}, \forall\, n\in \mathbb{N}, n>1$.

Demonstraţie.

$a\in F_f \Rightarrow f(a)=a \Rightarrow f(f(a))=f(a)$

deci $f^2(a)=a$, şi continuând procedeul, obţinem $f^n(a)=a$.

Observaţie.

O consecinţă a propoziţiei 1 este faptul că orice soluţie a ecuaţiei

$$f(x) = x \tag{2}$$

este soluţie a ecuaţiei

$$f^n(x) = x. \tag{3}$$

Se pune întrebarea naturală dacă are loc şi reciproca acestei afirmaţii. Următoarea propoziţie indică o situaţie când acest lucru se întâmplă.

Propoziţia 2.

Dacă $F_{f^n} = \{a\}$, $n\geq 1$, *atunci* $F_f = \{a\}$.

Demonstraţie.

Dacă $F_{f^n} = \{a\}$ rezultă că $f^n(a)=a$ şi a este unicul punct fix al lui f^n. Avem atunci, pe de o parte

$$f^{n+1}(a) = f^n(f(a)),$$

iar pe de altă parte

$$f^{n+1}(a) = f(f^n(a)) = f(a),$$

prin urmare

$$f^n(f(a)) = f(a),$$

deci $f(a) \in F_{f^n}$ şi cum $F_{f^n} = \{a\}$, rezultă $f(a)=a$, adică $a \in F_f$.
Dacă ar mai exista $b \in F_f$, $b \neq a$, atunci ar urma, pe baza propoziţiei 2, $b \in F_{f^n}$, adică $b=a$, contradicţie.

Aşadar

$$F_f = \{a\}.$$

<u>Observaţie</u>.

Condiţia ca f^n să admită un singur punct fix este esenţială în propoziţia 3, aşa cum arată

Exemplul 5.

Pentru funcţia $f:\{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$, dată prin $f(1)=3$, $f(2)=2$, $f(3)=1$, avem $F_f=\{2\}$, dar $F_{f^2} = \{1,2,3\}$.

<u>Observaţie</u>.

Pentru a obţine metoda promisă de rezolvare a sistemelor circulare avem nevoie să ştim în ce condiţii asupra lui f, f^n nu mai are alte puncte fixe în afara celor ale funcţiei f, adică ne interesează să obţinem condiţii suficiente pentru ca

$$F_{f^n} = F_f, \ \text{pentru orice } n \in \mathbf{N},\ n>1.$$

Propoziţia 3.

Dacă $f: A \to A$ ($A \subseteq \mathbf{R}$), $F_f=\{a\}$ şi f este crescătoare, atunci

$$F_{f^n} = \{a\}, \ \text{pentru orice } n \in \mathbf{N},\ n>1.$$

<u>Demonstraţie</u>.

Fie $b \in A$, $b \neq a$. Vom arăta că $b \notin F_{f^n}$.
Deoarece $F_f=\{a\}$, rezultă că $f(b) \neq b$. Fie, spre exemplu $f(b)>b$.
Cum f este crescătoare, rezultă

$$f(f(b)) \geq f(b),$$

adică $f^2(b) \geq f(b)$ şi cum $f(b)>b$, rezultă

$$f^2(b) > b.$$

Procedând la fel, obţinem

$$f^n(b) > b, \text{ deci } b \notin F_{f^n}.$$

Dacă $f(b)<b$, atunci $f^2(b) \le f(b) < b$, ş.a.m.d.

Observaţie.

Concluzia propoziţiei 3 nu se păstrează dacă f este descrescătoare (şi neconstantă) aşa cum arată

Exemplul 6.

Funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=-x$, $x \in \mathbb{R}$, este descrescătoare şi $F_f=\{0\}$ dar $f^2(x)=x$, prin urmare $F_{f^2} = \mathbb{R}$.

Propoziţia 4.

Dacă $f: A \to A$ $(A \subseteq \mathbb{R})$, $F_f=\{a\}$ şi

$$E(x) = (f(x)-x)(x-a) > 0$$

pentru orice $x \in A \setminus \{a\}$, atunci $F_{f^n} = \{a\}$.

Demonstraţie.

Fie $b \in A$, $b \notin F_f$. Rezultă $f(b) \ne b$, adică $f(b)>b$ sau $f(b)<b$. În primul caz, cum $E(b)>0$, rezultă $b>a$. Aşadar

$$f(b)>b>a, \text{ adica } f(b)>a.$$

Mai departe, din $E(f(b))=[f^2(b)-f(b)]\cdot(f(b)-a) > 0$, deducem

$$f^2(b) > f(b) > a,$$

şi procedând analog, obţinem

$$f^n(b)>f^{n-1}(b)>\ldots>f(b)>a,$$

deci $b \notin F_{f^n}$.

Dacă $f(b)<b$, atunci cum $E(b)>0$, rezultă $b<a$, adică

$$f(b) < b < a,$$

care ne conduce, având în vedere că $E(f(b))>0$, la

$$f^2(b) < f(b), \text{ s.a.m.d.}$$

Observații.

1) Este ușor de văzut că propoziția 3 este conținută în propoziția 4, căci dacă f este crescătoare atunci $E(x)>0$, $\forall x\in A\setminus\{a\}$. Superioritatea celui de-al doilea rezultat constă în faptul că f nu trebuie să fie în mod necesar monotonă.

2) Toate noțiunile prezentate până aici presupun cunoștințe până la nivelul clasei a IX-a, unde apare mai frecvent necesitatea rezolvării sistemelor neliniare. Demonstrația următorului rezultat se bazează pe cunoștințe de analiză și este fundamental în matematicile superioare, dar prin enunț este accesibil la nivelul clasei a IX-a.

TEOREMA 1. (Principiul contracției)

Fie I un interval închis din $\mathbb{R}$ *și* $f: I \to I$ *o funcție care îndeplinește următoarea condiție (numită* ***condiție de contracție****): există un număr c,* $0\le c<1$*, astfel încât*

$$|f(x)-f(y)| \le c\cdot|x-y|,\ \text{pentru orice}\ x,y\in I. \tag{4}$$

Atunci

$$F_f = F_{f^n} = \{a\},\ a\in I,\ \text{pentru orice}\ n\in\mathbf{N},\ n>1\ .$$

Demonstrație.

Fie $x_0\in I$, arbitrar. Construim recurent șirul $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, prin

$$x_{n+1} = f(x_n),\ n\ge 0. \tag{5}$$

Deoarece $f(x)\in I$, $\forall x\in I$, rezultă că $x_n\in I$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

Vom arăta că acest șir este convergent. Pentru orice $n,p\in\mathbf{N}$ avem

$$|x_{n+p}-x_n| = |x_{n+p}-x_{n+p-1}+x_{n+p-1}-\ldots+x_{n+1}-x_n| \le$$
$$\le |x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\ldots+|x_{n+1}-x_n|.$$

Apoi, luând $x=x_1=f(x_0)$ și $y=x_0$ obținem din (4)

$$|f(x_1)-f(x_0)| = |x_2-x_1| < c\cdot|x_1-x_0|,$$

adică

$$|x_2-x_1| < c\cdot|x_1-x_0|$$

şi apoi

$$|x_3-x_2| < c\cdot|x_2-x_1| < c^2\cdot|x_1-x_0|.$$

Prin inducţie deducem

$$|x_{n+1}-x_n| < c^n\cdot|x_1-x_0|,$$

care ne conduce la

$$|x_{n+p}-x_n| \leq (c^{n+p-1}+c^{n+p-2}+\ldots+c^n)\cdot|x_1-x_0|.$$

Dar

$$c^n+c^{n+1}+\ldots+c^{n+p-1} = \frac{c^n(1-c^p)}{1-c} < \frac{c^n}{1-c},$$

şi cum $0\leq c<1$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} c^n = 0,$$

prin urmare, pentru orice $\varepsilon>0$, există $r=r(\varepsilon)$, astfel încât

$$|x_{n+p}-x_n| < \varepsilon, \text{ pentru } n\geq r \text{ si orice } p\in\mathbb{N}.$$

Aceasta înseamnă (a se vedea [6]) că (x_n) este şir fundamental şi cum orice şir fundamental din $\mathbb{R}$ este convergent în $\mathbb{R}$, deducem că există $a\in\mathbb{R}$,

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Dar $x_n\in I$, $\forall n\in\mathbb{N}$ şi I este interval închis, prin urmare $a\in I$.
Vom arăta că a este unicul punct fix al funcţiei f.
Pentru aceasta avem nevoie să arătăm mai întâi că o funcţie care îndeplineşte o condiţie de forma (4), cu $c\geq 0$ (şi c nu neapărat subunitar) este continuă.

Într-adevăr, folosind continuitatea funcției modul avem

$$\lim_{y\to x} |f(x)-f(y)| = |\lim_{y\to x} (f(x)-f(y))| = |f(x)-\lim_{y\to x} f(y)|$$

iar $\lim_{y\to x} c\cdot|x-y| = 0,$, prin urmare

$$|f(x)-\lim_{y\to x} f(y)| \le 0,$$

adică

$$f(x) = \lim_{y\to x} f(y), \ \textit{pentru orice} \ x\in I.$$

Folosind acum continuitatea funcției f și trecând la limită în relația (5) obținem

$$a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(a),$$

deci $a\in F_a$.
Vom arăta că a este unicul punct fix al lui f. Presupunem, prin absurd că ar exista $b\in I$, $b\neq a$, astfel încât $b\in F_f$.
Rezultă atunci $f(b)=b$, $f(a)=a$ și luând $x=b$, $y=a$ în (4) deducem

$$|f(b)-f(a)| = |b-a| < c\cdot|b-a|,$$

adică

$$|b-a|\cdot(1-c) < 0,$$

contradicție, căci $c<1$.
Așadar $F_f=\{a\}$. Rezultă că $a\in F_{f^n}$.
Pentru a arăta că $F_{f^n} = \{a\}$ să observăm că din (4) obținem succesiv

$$|f^n(x)-f^n(y)| < c\cdot|f^{n-1}(x)-f^{n-1}(y)|<\ldots<c^n\cdot|x-y|,$$

adică

$$|f^n(x)-f^n(y)| < c^n|x-y|,\ \forall\ x,y\in I,$$

deci dacă am presupune că există $b\neq a, b\in F_{f^n}$, ar rezulta contradicţia

$$|b-a| < c^n|b-a|.$$

Teorema este complet demonstrată.

4. Metodă unitară de rezolvare a sistemelor circulare

Fie acum un sistem circular scris în forma generală

$$\begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = z \\ \vdots \\ f(t) = u \\ f(u) = x \end{cases} \tag{6}$$

având n ecuaţii şi n necunoscute.
Metoda substituţiei ne conduce la

$$\begin{aligned} x &= f(u) = f(f(t)) = f^2(t) = \ldots = f^{n-2}(z) = \\ &= f^{n-2}(f(y)) = f^{n-1}(y) = f^{n-1}(f(x)) = f^n(x), \end{aligned}$$

adică la o ecuaţie de forma

$$x = f^n(x), \tag{3}$$

pentru fiecare din necunoscutele x,y,z,...,t,u.
Aşadar dacă $(\overline{x},\overline{y},\overline{z},\ldots,\overline{t},\overline{u})$ este o soluţie a sistemului (6), atunci $\overline{x},\overline{y},\overline{z},\ldots,\overline{t},\overline{u}$ sunt soluţii ale ecuaţiei (3), adică, în termenii paragrafului precedent, sunt puncte fixe ale funcţiei f^n. Rezolvarea ecuaţiei (3) este foarte dificilă sau chiar imposibilă, chiar şi în cazul particular al exemplului 1, spre exemplu, unde $f(x) = \frac{x}{2}+\frac{1}{x}$ si $f^2(x) = \frac{x^2+2}{4x}+\frac{2x}{x^2+2}$, astfel că expresia lui $f^3(x)$ nu permite rezolvarea ecuaţiei (3).

Cheia metodei noastre este dată de fiecare din propozițiile 3 și 4 și teorema 1, care ne indică situațiile în care ecuația (3) este echivalentă cu ecuația

$$x = f(x),$$

și care, spre deosebire de (3), este foarte ușor de rezolvat.
Așadar metoda noastră comportă parcurgerea următoarelor operații.

Pasul 1. Aducem sistemul circular la forma (6).
Rezultatul acestui pas este determinarea funcției f.

Pasul 2. Aflăm punctele fixe ale funcției f, deci determinăm mulțimea F_f;

Pasul 3. Arătăm că $F_{f^2} = F_f$

Pasul 4. Soluția sistemului este atunci

$$(a,a,\ldots,a),\ a \in F_f.$$

APLICAȚII

1. Să se rezolve sistemul din exemplul 3.

<u>Rezolvare</u>.

În acest caz avem $f:[-5,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x+45}-\sqrt{x+5}$.
Punctele fixe ale lui f se obțin din ecuația

$$x = \sqrt{x+45}-\sqrt{x+5}$$

care se observă că admite soluția particulară x=4. Ecuația poate fi scrisă sub forma

$$x = \frac{40}{\sqrt{x+45}+\sqrt{x+5}} .$$

În membrul stâng avem funcția strict crescătoare g(x)=x iar în membrul drept funcția f(x) care, se dovedește, prin această scriere, a fi o funcție strict descrescătoare.
Din considerente grafice rezultă atunci că x=4 este unica soluție a ecuației, deci $F_f=\{4\}$.
Deoarece f este strict descrescătoare, propoziția 3 și propoziția

4 nu pot fi aplicate. Poate fi însă aplicată teorema 1.
Pentru aceasta, observând că $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[-5,+\infty)$, vom lua restricţia ei la intervalul $I=[0,\infty)$, pe care o notăm tot cu f.
Să arătăm că $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ îndeplineşte condiţiile teoremei 1. Cum intervalul $[0,\infty)$ este închis mai trebuie să arătăm că f satisface condiţia de contracţie (4).
Avem

$$|f(x)-f(y)| = |\sqrt{x+45} - \sqrt{y+45}-(\sqrt{x+5} - \sqrt{y+5})| =$$
$$= \left|\frac{x-y}{\sqrt{x+45} + \sqrt{y+45}} - \frac{x-y}{\sqrt{x+5} + \sqrt{y+5}}\right| =$$
$$= |x-y|\cdot\left|\frac{1}{\sqrt{x+45} + \sqrt{y+45}} - \frac{1}{\sqrt{x+5} + \sqrt{y+5}}\right| .$$

Folosind acum proprietăţile modulului şi faptul că $x,y\in I$ avem

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x+45}+\sqrt{y+45}} - \frac{1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{y+5}}\right| \leq \left|\frac{1}{\sqrt{x+45}+\sqrt{y+45}}\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{y+5}}\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2\sqrt{45}} + \frac{1}{2\sqrt{5}} ,$$

aşadar

$$|f(x) - f(y)| \leq c\cdot|x-y| , \quad \forall\, x,y\in I,$$

unde $c = \dfrac{1}{2\sqrt{45}} + \dfrac{1}{2\sqrt{5}} < 1$.
Prin urmare, toate condiţiile din teorema 1 fiind îndeplinite, rezultă

$$F_{f^3} = \{4\},$$

deci unica soluţie a sistemului este (4,4,4).

<u>Notă</u>. 1. Este uşor de văzut că rezolvarea este aceeaşi şi în cazul când sistemul are $n>3$ ecuaţii (şi neconuscute).

2. Pentru sistemul din exemplul 2 avem

$$f(x) = x^2+5x+4, \quad cu\ F_f = \{-2\},$$

şi cum $I=[-2,+\infty)$ este un interval închis cu proprietatea $f(x)\in I$, pentru orice $x \in I$, căci

$$f(x) = (x+2)^2+x \geq x \geq -2, \quad \forall\, x \in I,$$

considerând restricţia f: I → I a lui f şi aplicând propoziţia 3 (f este strict crescătoare) rezultă

$$F_{f^3} = \{-2\},$$

deci unica soluţie a sistemului este (-2,-2,-2).

3. Pentru sistemul din exemplul 1 avem

$$f(x) = \frac{x}{2}+\frac{1}{x} \quad \textit{si} \quad F_f = \{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\}.$$

Considerăm mai întâi restricţia f_1 a lui f la intervalul $I=[\sqrt{2},\infty)$. Cum f este strict crescătoare pe acest interval, rezultă pe baza propoziţiei 3 că $F_{f^n} = \{\sqrt{2}\}$, pentru orice n>1, deci unica soluţie a sistemului pe I este $(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2})$. Luând acum restricţia f_2 a lui f la intervalul $I=(-\infty,-\sqrt{2}]$ obţinem că $(-\sqrt{2},-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ este unica soluţie a sistemului pe mulţimea $(-\infty,-\sqrt{2}]$. Cum f nu are puncte fixe în intervalul $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, rezultă că sistemul are două soluţii.

4. Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x^3-7x^2+8x-2 = y \\ 2y^3-7y^2+8y-2 = z \\ 2z^3-7z^2+8z-2 = x \end{cases}$$

(Matematika v şkole, 1985)

<u>Rezolvare</u>. Avem $f(x) = 2x^3-7x^2+8x-2$ şi $F_f = \{\frac{1}{2},1,2\}$.

Luăm $I_1 = (-\infty,\frac{1}{2}]$. . Deoarece $f'(x) = 6x^2-14x+8 = 2(3x-4)(x-1)$ avem

$f'(x)>0$ pentru $x\in I_1$, deci aplicând propoziţia 3 rezultă că $\frac{1}{2}$ este unicul punct fix al lui f^n pe I_1.

Prin urmare unica soluţie a sistemului pe I_1 este $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

Luăm acum $I_2 = (\frac{1}{2},1]$ şi cum $f'(x)>0$, pentru $x\in I_2$, rezultă $f(x)>f(\frac{1}{2})$ şi $f(x)\le f(1)$, pentru orice $x\in I_2$, adică $f(x)\in(\frac{1}{2},1]$, pentru $x\in I_2$.

Putem considera deci restricţia lui f la I_2, $f_2: I_2 \to I_2$, căreia îi aplicăm din nou propoziţia 3.

Obţinem astfel soluţia (1,1,1).

În sfârşit, luând $I_3=[2,\infty)$, având în vedere că iarăşi $f'(x)>0$ pentru $x\in I_3$, deducem $f(x)\ge f(2)$, pentru $x\in I_3$, adică $f(x)\ge 2$.

Prin urmare restricţia f_3 a lui f la I_3 satisface propoziţia 3, deci (2,2,2) este unica soluţie a sistemului pe $[2,\infty)$.

Aşadar sistemul admite soluţiile:

$$(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),\ (1,1,1),\ (2,2,2).$$

Notă. Sistemele circulare considerate de noi admit numai soluţii de forma (a,a,a), cu $a\in F_f$.

Propunem în încheiere cititorului, elev sau profesor, să compare eficienţa metodelor prezentate în această lucrare pentru fiecare din exerciţiile propuse următoare.

5. Exerciţii propuse.

1. $\begin{cases} x^2-y = 5 \\ y^2-x = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+by^2 = a \\ y+bx^2 = a \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^3 = ax+by \\ y^3 = x+5y \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^3 = 5x+y \\ y^3 = x+5y \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+2y = 4 \\ y^2+2x = 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = y^3-3y \\ y = -3x+x^3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+y^2 = a \\ x^2+y = a \end{cases}$

8. $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{a} \\ y+\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2-2\sqrt{2y-1}-1 = 0 \\ y^2-2\sqrt{2x-1}-1 = 0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^3-y^2+x-1 = 0 \\ y^3-x^2+y-1 = 0 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = z+\dfrac{2}{z} \\ y = x+\dfrac{2}{x} \\ z = y+\dfrac{2}{y} \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x+x^2y = y \\ 2y+y^2z = z \\ 2z+z^2x = x \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = 2y\sqrt{1+y^2} \\ y = 2z\sqrt{1+z^2} \\ z = 2x\sqrt{1+x^2} \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x^2 = (x^2+1)y \\ 2y^2 = (y^2+1)z \\ 2z^2 = (z^2+1)x \end{cases}$

15. $\begin{cases} 2y-x^2 = 1 \\ 2z-y^2 = 1 \\ 2x-z^2 = 1 \end{cases}$

16. $\begin{cases} y^5+y^5x^2-2x = 0 \\ z^5+z^5y^2-2y = 0 \\ x^5+x^5z^2-2z = 0 \end{cases}$

17. $$\begin{cases} y^3-9x^2+27x-27 = 0 \\ z^3-9y^2+27y-27 = 0 \\ x^3-9z^2+27z-27 = 0 \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} x^3-3az^2+3a^2z-a^3 = 0 \\ y^3-3ax^2+3a^2x-a^3 = 0 \\ z^3-3ay^2+3a^2y-a^3 = 0 \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} ax-by^2 = c \\ ay-bz^2 = c \\ az-bx^2 = c \quad a>0,\ b>0,\ c>0\ . \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y} = a \\ y+\dfrac{1}{z} = a \\ z+\dfrac{1}{x} = a \end{cases}$$

21. $$\begin{cases} \sqrt{1-x^2} = 3y-4y^3 \\ \sqrt{1-y^2} = 3z-4z^3 \\ \sqrt{1-z^2} = 3x-4x^3 \end{cases}$$

22. $$\begin{cases} y+x^3 = 3x(1+xy) \\ z+y^3 = 3y(1+zy) \\ x+z^3 = 3z(1+xz) \end{cases}$$

23. $$\begin{cases} (x+2)(2x+1) = 9z \\ (y+2)(2y+1) = 9x \\ (z+2)(2z+1) = 9y \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} ax-b|y| = c \\ ay-b|z| = c \\ az-b|x| = c \end{cases}$$

25. $$\begin{cases} 2x(y-a) = 1 \\ 2y(z-a) = 1 \\ 2z(u-a) = 1 \\ 2u(x-a) = 1 \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} 1+x^2 = 2y \\ 1+y^2 = 2z \\ 1+z^2 = 2u \\ 1+u^2 = 2x \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(y+\frac{1}{y}) \\ y = \frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}) \\ z = \frac{1}{2}(u+\frac{1}{u}) \\ u = \frac{1}{2}(x+\frac{1}{x}) \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} ax_1-bx_2^2 = c \\ ax_2-bx_3^2 = c \\ \vdots \\ ax_{n-1}-bx_n^2 = c \\ ax_n-bx_1^2 = c \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} ax_1+bx_1+c = x_2 \\ ax_2^2+bx_2+c = x_3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ ax_{n-1}^2+bx_{n-1}+c = x_n \\ ax_n^2+bx_n+c = x_1,\ a\neq 0 \end{cases}$$

În acest caz sistemul are

a) Soluţie,

b) Soluţie unică?

(Olimpiada Internaţ. de Mat., 1968).

30. $$\begin{cases} x_1 = 2x_2^2-1 \\ x_2 = 2x_3^2-1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_n = 2x_1^2-1 \end{cases}$$

Determinaţi soluţiile strict pozitive ale sistemului

31. $$\begin{cases} 1-x_1^2 = x_2 \\ 1-x_2^2 = x_3 \\ \dots\dots\dots \\ 1-x_n^2 = x_1 \end{cases}$$

32. $$\begin{cases} x_1+\dfrac{2}{x_1} = 2x_2 \\ x_2+\dfrac{2}{x_2} = 2x_3 \\ \dots\dots\dots \\ x_n+\dfrac{2}{x_n} = 2x_1 \end{cases}$$

33. $$\begin{cases} 2x_2 = x_1+\dfrac{a}{x_1} \\ 2x_3 = x_2+\dfrac{a}{x_2} \quad (a>0) \\ \dots\dots\dots \\ 2x_n = x_{n-1}+\dfrac{a}{x_{n-1}} \\ 2x_1 = x_n+\dfrac{a}{x_n} \end{cases}$$

34. $$\begin{cases} 1+x_1^2 = 2x_2 \\ 1+x_2^2 = 2x_3 \\ \dots\dots\dots \\ 1+x_n^2 = 2x_1 \end{cases}$$

Fie $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$ şi $a,b\in\mathbb{R}$. Să se arate că sistemul de inecuaţii

35. $$\begin{cases} x_1^2 \leq ax_2+b \\ x_2^2 \leq ax_3+b \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1}^2 \leq ax_n+b \\ x_n^2 \leq ax_1+b \end{cases}$$

are soluţie unică în $\mathbb{R}^n$ dacă şi numai dacă $a^2+4b=c$.

(Concurs probleme cu motto, G.M. 6/1987)

B I B L I O G R A F I E

1. ANDREI,Gh.,ş.a., Algebră. Probleme pentru olimpiadele de matematică, Constanţa, 1990

2. CARAGEA,C., NICOLESCU,R., Un cadru unitar pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii, Gazeta Matematică, 12/1982, 435-436

3. GANGA,M., Teme şi probleme de matematică, Ed.tehnică, 1990

4. MUREŞAN,A.S, MUREŞAN,V., Probleme date la admiterea în învăţământul superior, Ed.Tehnică, 1992

5. NĂSTĂSESCU,C., ş.a., Exerciţii şi probleme de algebră, E.D.P., 1992

6. NICOLAESCU,L.I.: Asupra convergenţei iteratelor unei aplicaţii a unui interval în el însuşi, Gaz.Mat., Perf.Met.Metod Mat.Inf., anul IX, nr.2, 1988, 76-80

7. NICOLESCU,M., Analiză matematică, vol.1, Ed.Didactică şi Pedagogică, 1971

8. RUS,A.I., Principii şi aplicaţii ale teoriei punctului fix, Ed.Dacia, Cluj-Napoca, 1979

9. *** Gazeta Matematică, 1970-1992

THE CONTRACTION MAPPING PRINCIPLE APPLIED FOR SOLVING NONLINEAR CYCLIC SYSTEMS OF EQUATIONS

ABSTRACT. In this paper we give a method for solving cyclic systems of equations, i.e. systems of the form

$$\begin{aligned} x &= f(y) \\ y &= f(z) \\ &\vdots \\ t &= f(x) \ , \end{aligned}$$

with f a given real function, by means of some elementary fixed point results.

UNIVERSITATEA DIN BAIA MARE
Facultatea de Litere şi Ştiinţe
str.Victoriei 76, 4800 BAIA MARE
ROMÂNIA