Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.2(1992-1993), 25-40

STRUCTURI ALGEBRICE TERNARE DEFINITE PE PUNCTELE UNEI PARABOLE

Maria S. POP

Prin structură algebrică înţelegem o mulţime pe care s-au definit un număr finit de legi de compoziţie şi de relaţii împreună cu proprietăţile lor. O lege de compoziţie poate fi o operaţie binară, ternară, ..., n-ară. În lucrare se prezintă unele exemple de structuri algebrice definite pe mulţimea punctelor unei parabole, structuri care le generalizează pe cele clasice de semigrup, monoid, grup, prin înlocuirea operaţiei binare cu una ternară şi formularea axiomelor astfel încât fixând un element, în operaţia ternară, operaţia binară obţinută să definească pe acea mulţime structurile algebrice obişnuite.

Primul paragraf are un caracter introductiv, în el prezentându-se noţiunile care vor fi exemplificate în cel de al doilea paragraf.

§ 1. DEFINIŢII

Definiţia 1.1. Fie A o mulţime oarecare. Se numeşte *operaţie ternară* în mulţimea A, o aplicaţie "$\circ$" a produsului cartezian A^3 în A, $\circ: A^3 \to A$. Imaginea sistemului de elemente $(a_1,a_2,a_3)\in A^3$ prin "$\circ$" notată prin $(a_1,a_2,a_3)_\circ$ se numeşte produs, iar elementele a_1,a_2 şi a_3 se numesc factori.

Definiţia 1.2. Operaţia $\circ: A^3 \to A$ se numeşte *asociativă* dacă pentru orice $a_i\in A;\ i=\overline{1,5}$ avem

$$((a_1,a_2,a_3)^{*},a_4,a_5)_{\circ} = (a_1,(a_2,a_3,a_4)_{\circ},a_5)_{\circ} = (a_1,a_2,(a_3,a_4,a_5)_{\circ})_{\circ} \qquad (1)$$

Perechea $(A,\circ)$ unde "$\circ$" este o operaţie ternară asociativă se numeşte *3-semigrup* (semigrup ternar).

Observaţia 1.1. Dacă $(A,\cdot)$ este un semigrup obişnuit atunci definind operaţia ternară "$\circ$" pe A:

$$(a_1,a_2,a_3)_{\circ} = a_1\cdot a_2\cdot a_3; \quad a_i\in A; \quad i=1,2,3\ ,$$

perechea $(A,\circ)$ este un semigrup ternar numit *extinderea ternară* a semigrupului $(A,\circ)$. Nu orice 3-semigrup este extinderea ternară a unui semigrup obişnuit.
Invers, dacă $(A,\circ)$ este un semigrup ternar, atunci definind operaţia binară $\cdot: A^2 \to \bar{A}$; $x\cdot y=(x,a,y)_{\circ}$, $x,y\in A$ şi $a\in A$ fixat, perechea $(A,\cdot)$ este un semigrup numit *reducerea binară a lui $(A,\circ)$* în raport cu elementul a.

Comutativitatea operaţiei binare se generalizează în două moduri, introducând noţiunea de comutativitate şi semicomutativitate.

Definiţia 1.3. Un 3-semigrup $(A,\circ)$ se numeşte *semicomutativ* dacă pentru orice $a_1,a_2,a_3\in A$ avem

$$(a_1,a_2,a_3)_{\circ} = (a_3,a_2,a_1)_{\circ} \qquad (2)$$

şi *comutativ* dacă pentru orice permutare σ a mulţimii $\{1,2,3\}$ avem

$$(a_1,a_2,a_3)_{\circ} = (a_{\sigma(1)},\ a_{\sigma(2)},\ a_{\sigma(3)})_{\circ} \qquad (3)$$

Spre *exemplu*, operaţia definită pe $\mathbb{R}^*$:

$$(a_1,a_2,a_3)_{\circ} = \frac{a_1a_3}{a_2}$$

este semicomutativă.

Definiţia 1.4. Un element e al unui 3-semigrup $(A,\circ)$ se numeşte *unitate* dacă pentru orice $a\in A$ avem

$$(a,e,e)_\circ = (e,a,e)_\circ = (e,e,a)_\circ = a \tag{4}$$

Definiţia 1.5. Un 3-semigrup $(A,\circ)$ se numeşte *3-grup* sau *grup ternar* dacă pentru orice $a,b,c \in A$ fiecare din ecuaţiile

$$(a,b,x)_\circ = c \tag{5}$$

$$(a,y,b)_\circ = c \tag{6}$$

$$(z,a,b)_\circ = c \tag{7}$$

au soluţie unică.

Observaţia 1.2. Definiţia 1.5 generalizează definiţia grupului obişnuit ca un semigrup $(A,\circ)$ în care ecuaţiile $x\cdot a=b$; $a\cdot y=b$ au soluţie unică, oricare ar fi $a,b \in A$.
Spre deosebire însă de cazul binar în care această definiţie este echivalentă cu aceea de semigrup în care există element neutru (unitate) şi fiecare element este simetrizabil (inversabil, în notaţie multiplicativă), în cazul ternar există 3-grupuri fără element unitate sau care au mai multe unităţi. Spre exemplu, pe mulţimea $Z_2 = \{\hat{0},\hat{1}\}$ se pot defini două operaţii ternare comutative şi asociative "$\circ$, $*$": $Z_2^3 \to Z_2$ astfel:

$$(a_1,a_2,a_3)_\circ = a_1+a_2+a_3$$

deci

$$(\hat{0},\hat{0},\hat{0})_\circ = \hat{0};\ (\hat{0},\hat{1},\hat{1})_\circ = \hat{0};\ (\hat{0},\hat{0},\hat{1})_\circ = \hat{1};\ (\hat{1},\hat{1},\hat{1})_\circ = \hat{1}$$

şi

$$(a_1,a_2,a_3)_* = a_1+a_2+a_3+\hat{1}$$

adică

$$(\hat{0},\hat{0},\hat{0})_* = \hat{1};\ (\hat{0},\hat{1},\hat{1})_* = \hat{1};\ (\hat{0},\hat{0},\hat{1})_* = \hat{0};\ (1,1,1)_* = \hat{0}$$

Se verifică că $(Z_2,\circ)$ şi $(Z_2,*)$ sunt 3-grupuri comutative, primul având două unităţi, iar cel de al doilea nici o unitate în sensul definiţiei 1.4.

Definiţia 1.6. Dacă $(A,\circ)$ este un 3-grup şi $a \in A$, atunci soluţia ecuaţiei

$$(a,a,x)_\circ = a \tag{8}$$

se numeşte *element transversal* lui a şi se notează prin $\overline{a}$.

Relativ la această noţiune se demonstrează

TEOREMA 1.1. *Dacă $(A,\circ)$ este un grup ternar şi $\overline{a}$ este transversala lui $a \in A$ definită de ecuaţia (8), atunci:*

1° $$(\overline{a},a,a)_\circ = (a,\overline{a},a)_\circ = (a,a,\overline{a})_\circ = a \tag{9}$$

(elementul transversal poate ocupa orice loc în egalitatea de definiţie);

2° pentru orice $x \in A$ avem

$$(\overline{a},a,x)_\circ = (a,\overline{a},x)_\circ = (x,a,\overline{a})_\circ = (x,\overline{a},a)_\circ = x\ ; \tag{10}$$

3° $$\overline{(\overline{a})} = a$$

(transversala transversalei unui element coincide cu acel element);

4° soluţiile ecuaţiilor (5)-(7) pot fi scrise cu ajutorul elementelor transversale ale lui a şi b astfel:

$$x = (\overline{b},\overline{a},c)_\circ \tag{11}$$

respectiv

$$y = (\overline{a},c,\overline{b})_\circ \tag{12}$$

$$z = (c, \overline{b}, \overline{a})_\circ \qquad (13)$$

5° *Într-un grup ternar, elementul $a \in A$ este unitate dacă şi numai dacă $\overline{a} = a$, iar transversala produsului este egală cu produsul transversalelor.*

Definiţia 1.7. Dacă $(A, \circ)$ este un 3-semigrup şi $a \in A$, are proprietatea

$$(a, a, a)_\circ = a$$

atunci se numeşte *element idempotent.*

Observaţia 1.3. Se verifică uşor că *reducerea binară* a unui grup ternar în raport cu orice element fixat a, al său (vezi observaţia 1.1) este un grup binar cu unitatea $\overline{a}$, transversala acelui element.

Definiţia 1.8. Dacă $(A, \circ)$ şi $(B, *)$ sunt semigrupuri (grupuri) ternare, aplicaţia $f: A \to B$ se numeşte *omomorfism* de *semigrupuri (grupuri) ternare,* dacă pentru orice $a_1, a_2, a_3 \in A$ avem

$$f((a_1, a_2, a_3)_\circ) = (f(a_1), f(a_2), f(a_3))_* \qquad (14)$$

Un omomorfism bijectiv de semigrupuri (grupuri) ternare se numeşte *izomorfism.*

Se demonstrează uşor că dacă f este un omomorfism al grupurilor ternare $(A, \circ)$ şi $(B, *)$ atunci imaginea transversalei oricărui element $a \in A$ coincide cu transversala imaginei lui a în B, adică

$$f(\overline{a}) = \overline{f(a)} \quad \forall\, a \in A \qquad (15)$$

Are loc deasemenea următoarea afirmaţie

TEOREMA 1.2. *Dacă $f: A \to B$ este o aplicaţie bijectivă şi $\circ: A^3 \to A$ este o operaţie ternară definită pe A astfel încât $(A, \circ)$ este un 3-grup, iar operaţia $*: B^* \to B$ se defineşte astfel*

$\forall\, b_1, b_2, b_3 \in B;\ (b_1, b_2, b_3)_* = f((a_1, a_2, a_3)_\circ)$ *unde a_1, a_2, a_3 sunt* *definite de relațiile $f(a_i)=b_i$ $i=1,2,3$, atunci $(B,*)$ este deasemenea grup ternar izomorf cu $(A,\circ)$.*

§ 2. GRUPURI TERNARE DEFINITE PE PUNCTELE UNEI PARABOLE

În lucrarea [2] Kuznețova introduce o structură de corp pe mulțimea punctelor parabolei $y=x^2$, definind "suma" respectiv "produsul" a două puncte ca fiind punctul parabolei de abscisă egală cu suma respectiv produsul absciselor celor două puncte. Pornind de la interpretarea geometrică dată celor două legi de compoziție în lucrarea [4] se dă o generalizare pentru mulțimea $\wp$ a punctelor parabolei $y=ax^2+bx+c$; $a,b,c\in\mathbb{R}$; $a\neq 0$.

În cele ce urmează vom da câteva exemple de grupuri ternare definite pe mulțimea $\wp$.

<u>Exemplul 2.1</u>

Fie operația ternară $\circ$: $\wp^3 \to \wp$ care asociază oricăror trei puncte M_1,M_2,M_3 ale parabolei punctul $M=(M_1,M_2,M_3)_\circ\in\wp$ definit astfel:

1° Dacă M_1,M_2,M_3 sunt distincte și tangenta în M_2 la parabolă nu este paralelă cu dreapta M_1M_3, atunci $(M_1,M_2,M_3)=M_4$ unde M_4 este punctul în care paralela dusă prin M_2 la M_1,M_3, retaie parabola (Fig.1a).

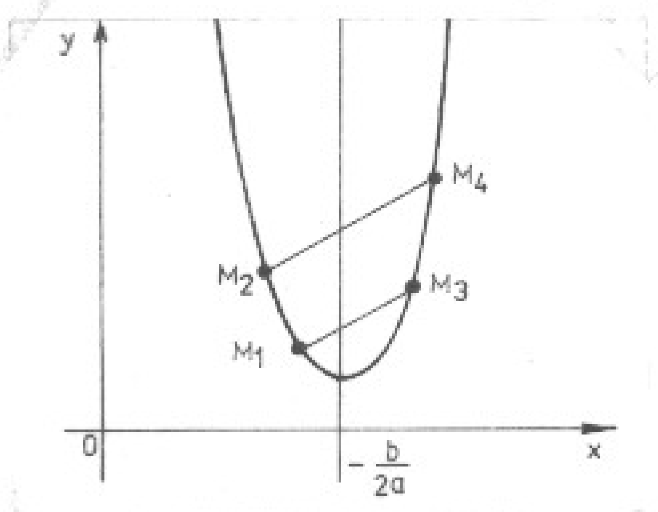
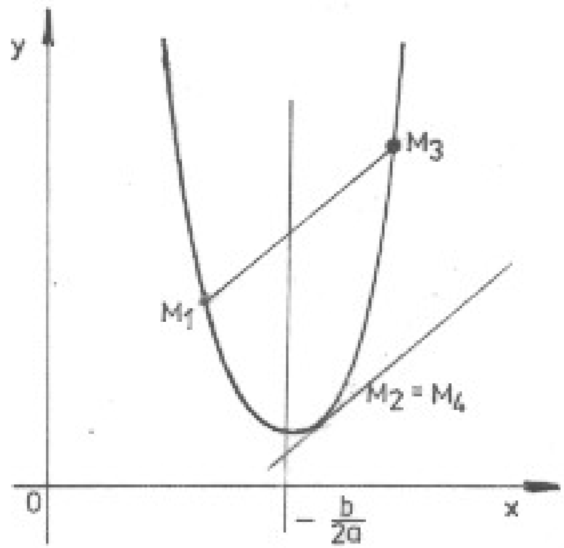


Fig. 1a

2° Dacă M_1,M_2,M_3 sunt distincte și tangenta în M_2 la parabolă este paralelă cu M_1M_3, atunci $(M_1,M_2,M_3)_\circ=M_2$ (Fig.1b);

3° Dacă $M_1=M_3 \neq M_2$ atunci $(M_1,M_2,M_1)_\circ=M_4$ este punctul în care paralela dusă prin M_2 la tangenta în M_1 la parabolă retaie parabola (Fig.1c).

Fig. 1b



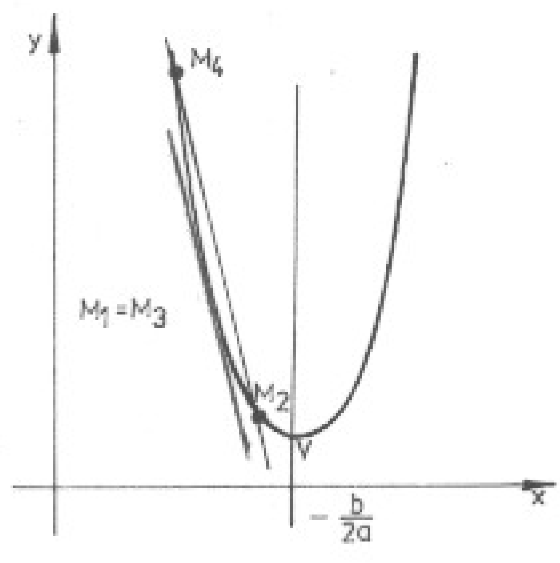
Analog,

4° Dacă $M_1=M_2 \neq M_3$ atunci $(M_1,M_1,M_3)_\circ=M_3$;

5° Dacă $M_1 \neq M_2=M_3$ atunci $(M_1,M_2,M_2)_\circ=M_1$

6° Dacă $M_1=M_2=M_3$ atunci $(M_1,M_1,M_1)_\circ=M_1$

Fig. 1c



Are loc următoarea propoziție

<u>Propoziția 2.1</u> *Perechea $(\mathcal{P},\circ)$ este un grup ternar semicomutativ, fără element unitate, izomorf cu grupul ternar $(\mathbb{R},*)$ unde $(x_1,x_2,x_3)_* = x_1-x_2+x_3$. $\forall x_i\in\mathbb{R}$; $i=1,2,3$.*

Demonstrație. Vom transpune algebric definițiile geometrice ale operației "$\circ$". Fie $M_i(x_i,y_i)\in\mathcal{P}$; $i=1,2,3$ și $M_1\neq M_3$. Panta dreptei M_1M_3 este

$$m=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\frac{(ax_3^2+bx_3+c)-(ax_1^2+bx_1+c)}{x_3-x_1}=a(x_3+x_1)+b$$

Paralela prin M_2 la M_1M_3 are ecuația

$$y-y_2=[a(x_1+x_3)+b](x-x_2).$$

Intersectând această dreaptă cu parabola obținem

$$ax^2+bx+c-(ax_2^2+bx_2+c)=[a(x_1+x_3)+b](x-x_2).$$

O soluție a acestei ecuații fiind $x=x_2$, corespunzătoare punctului M_2, cealaltă

$$x=x_1-x_2+x_3 \tag{16}$$

ne dă abscisa punctului M_4 din situația 1°.

În situația 2° paralelismul tangentei în M_2 la parabolă cu dreapta M_1M_3 implică egalitatea coeficienților lor unghiulari, adică

$$2ax_2+b=a(x_1+x_3)+b$$

sau

$$x_2=x_1-x_2+x_3 \tag{17}$$

Dacă $M_1=M_3\neq M_2$, adică $x_1\neq x_3\neq x_2$ panta tangentei în M_1 la parabolă fiind $2ax_1+b$, atunci paralela dusă prin M_2 la această tangentă are ecuația

$$y-y_2=(2ax_1+b)(x-x_2)$$

Intersectând-o cu parabola obținem soluțiile $x=x_2$ corespunzătoare punctului M_2 și $x=2x_1-x_2$ corespunzătoare punctului $(M_1,M_2,M_1)\circ$, în situația 3°.

În particular, deoarece pentru $x_1=x_2$, $x_2=x_3$ respectiv $x_1=x_2=x_3$

din relația (16) obținem $x=x_3$ ($x=x_1$) corespunzător situațiilor 4° (5° respectiv 6°), putem "uniformiza" definiția abscisei operației ternare definită pe mulțimea $\wp$ astfel:
dacă x_i sunt abscisele punctelor M_i; $i=1,2,3$, atunci abscisa punctului $(M_1,M_2,M_3)_\circ$ este

$$x = x_1-x_2+x_3 \ . \tag{16}$$

Se verifică ușor că operația ternară $*$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $(x_1,x_2,x_3)_* = x_1-x_2+x_3$ este semicomutativă, asociativă și că ecuațiile

$$(x,m,n)_* = p \quad si \quad (m,x,n)_* = p$$

au soluție unică oricare ar fi $m,n,p\in\mathbb{R}$. Totodată $(x,x,x)_* = x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ și întrucât relația $(x,e,e)_*=x$ are loc doar pentru $x=e$ nu există element unitate (neutru). Am demonstrat astfel că $(\mathbb{R},*)$ este un grup ternar semicomutativ, fără unitate, toate elementele sale fiind idempotente.

Deoarece aplicația f: $\wp \to \mathbb{R}$ care asociază oricărui punct $M\in\wp$ abscisa sa este o bijecție și conform relației (16)

$$f((M_1,M_2,M_3)_\circ) = x_{(M_1,M_2,M_3)_\circ} = x_1-x_2+x_3 = (x_1,x_2,x_3)_*$$

aceasta demonstrează conform teoremei 1.2 din paragraful 1 că perechea $(\wp,\circ)$ este grup ternar.

Observația 2.1. Dacă fixăm punctul M_2 în V, vârful parabolei, adică $V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$ unde $\Delta=b^2-4ac$, atunci operația binară $\oplus$: $\wp^2 \to \wp$ $M_1\oplus M_3 = (M_1,V,M_3)_\circ$ definește pe mulțimea $\wp$ un grup abelian cu unitatea V în care

$$x_{M_1\oplus M_3} = x_1+\frac{b}{2a}+x_3$$

Am regăsit astfel grupul aditiv $(\wp,\oplus)$ definit în lucrarea [4].

Exemplul 2.2.

Fie $M_i(x_i,y_i)\in\wp$; $i=1,2,3$ și $\circ$: $\wp^3 \to \wp$ o operație ternară astfel definită:

$$(M_1, M_2, M_3)_\circ = M \text{ unde } x_M = x_1 + x_2 + x_3 + \frac{b}{a} \tag{18}$$

Au loc următoarele afirmaţii.

Propoziţia 2.2. *Perechea $(\wp, \circ)$ este un 3-grup comutativ cu o singură unitate, vârful parabolei V.*

Dacă M_1, M_2, M_3 sunt puncte distincte ale parabolei atunci $M = (M_1, M_2, M_3)_\circ$ este simetricul faţă de axa parabolei a punctului M_4 în care cercul determinat de M_1, M_2 şi M_3 retaie parabola (Fig.2a)

Dacă $M_1 = M_2$ atunci acest cerc este tangent la parabolă în punctul M_1 şi trece prin M_3 (Fig.2b).

Dacă $M_1 = M_2 = M_3$, atunci acest cerc este cercul de curbură (osculator) al parabolei punctul M_1.

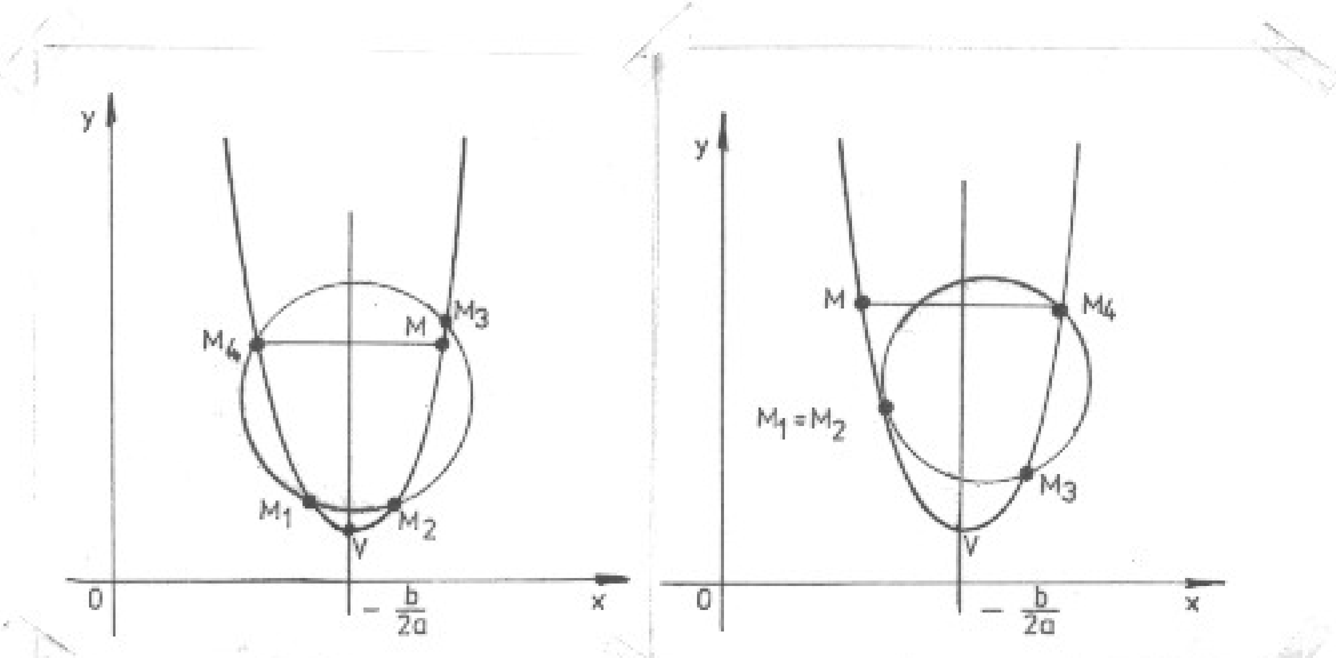


Fig. 2a   Fig. 2b

Demonstraţie. Se verifică uşor că $(\wp, \circ)$ este un 3-grup comutativ cu elementul neutru V. Pentru interpretarea geometrică a operaţiei ternare facem mai întâi translaţia $X = x + \frac{b}{2a}$; $Y = y + \frac{\Delta}{4a}$ şi scriem ecuaţia cercului determinat de punctele $M_i(X_i, aX_i^2) \in \wp$, i=1,2,3.

Abscisa X_4 a punctului M_4 în care acest cerc retaie parabola se determină ca soluție a ecuației:

$$\begin{vmatrix} X^2+a^2X^4 & X & aX^2 & 1 \\ X_1^2+a^2X^4\;1 & X_1 & aX_1^2 & 1 \\ X_2^2+a^2X_2^4 & X_2 & aX_2^2 & 1 \\ X_3^2+a^2X_3^4 & X_3 & aX_3^2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad sau \quad \begin{vmatrix} X^4 & X^2 & x & 1 \\ X_1^4 & X_1^2 & X_1 & 1 \\ X_2^4 & X_2^2 & X_2 & 1 \\ X_3^4 & X_3^2 & X_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (19)$$

Deoarece în ecuație lipsește termenul în X^3, suma rădăcinilor ei este 0 de unde avem $X_4=-(X_1+X_2+X_3)$, iar simetricul M al punctului M_4 față de OY are abscisa $X_M=X_1+X_2+X_3$. Revenind la vechile coordonate deducem că $x_M = x_1+x_2+x_3+\frac{b}{a}$, ceea ce era de demonstrat.

Fie $M_1=M_2=M_3\in\mathcal{P}$, M_1 de abscisă x_0 și $M=(M_1,M_1,M_1)_\circ$, adică $x_M = 3x_0+\frac{b}{a}$. Scriind ecuația cercului osculator [3] parabolei $Y=aX^2$ în punctul $M_1(X_0,aX_0^2)$ unde $X_0 = x_0+\frac{b}{2a}$, avem:

$$(X+4a^2X_0^3)^2+\left(Y-\frac{6a^2X_0^2+1}{2a}\right)^2 = \frac{(1+4a^2X_0^2)^3}{4a^2}$$

Intersectând acest cerc cu parabola, obținem ecuația

$$X^4-6X_0^2X^2+8X_0^3X-3X_0^4 = 0$$

cu rădăcinile $X_1=X_2=X_3=X_0$ și $X_4=-3X_0$.
Simetricul M al punctului $M_4(X_4,aX_4^2)$ față de axa parabolei are abscisa $X_M=3X_0$ sau revenind la vechiul reper $x_M=3x_0+\frac{b}{a}$, ceea ce demonstrează complet afirmația din enunțul propoziției 2.2.

Observația 2.2. Operația ternară "$\circ$" anterior definită reprezintă extinderea ternară a operației binare $\oplus$ din lucrarea [4]

se verifică uşor că $(M_1 \oplus M_2) \oplus M_3 = (M_1, M_2, M_3)_\circ$.
Formulaţi în limbaj geometric această observaţie.

Exemplul 2.3. Pe mulţimea $G=\mathcal{P}\setminus\{V\}$ a punctelor diferite de vârf ale unei parabole definim operaţia ternară $[\,]: G^3 \to G$.

1) Dacă $M_1, M_2, M_3 \in G$ sunt puncte distincte, atunci $[M_1, M_2, M_3]=M_4$ este punctul în care dreapta determinată de M_2 şi punctul M de intersecţie a axei de simetrie a parabolei cu secanta M_1M_3 retaie parabola (Fig.3a);

2) Dacă $M_1=M_3\neq M_2$ atunci $[M_1, M_2, M_1]=M_4$ este punctul care dreapta determinată de M_2 şi punctul de intersecţie M_0 al axei de simetrie a parabolei cu tangenta în M_1 la parabolă, retaie parabola (Fig.3b)

3) Dacă $M_1=M_2\neq M_3$ respectiv $M_1\neq M_2=M_3$ atunci $[M_1, M_1, M_3]=M_3$ respectiv $[M_1, M_2, M_2]=M_1$;

4) Dacă $M_1=M_2=M_3$, atunci $[M_1, M_1, M_1]=M_1$.

Din definiţia dată rezultă imediat semicomutativitatea acestei operaţii ternare.

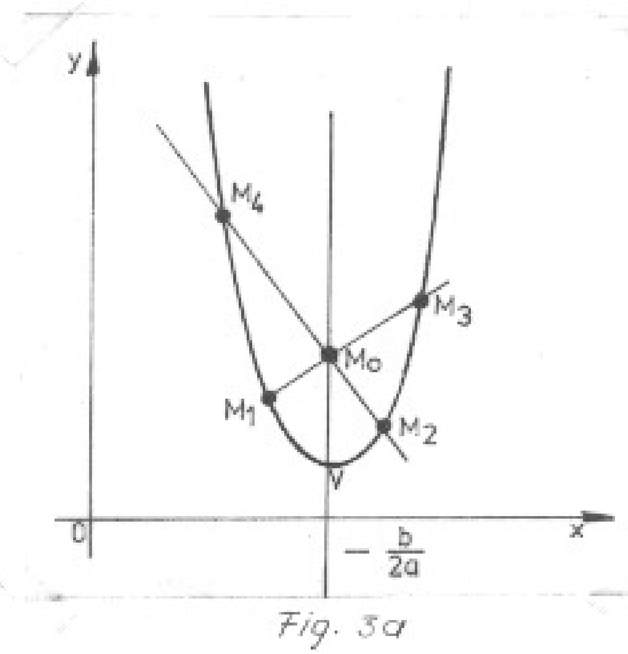


Fig. 3a

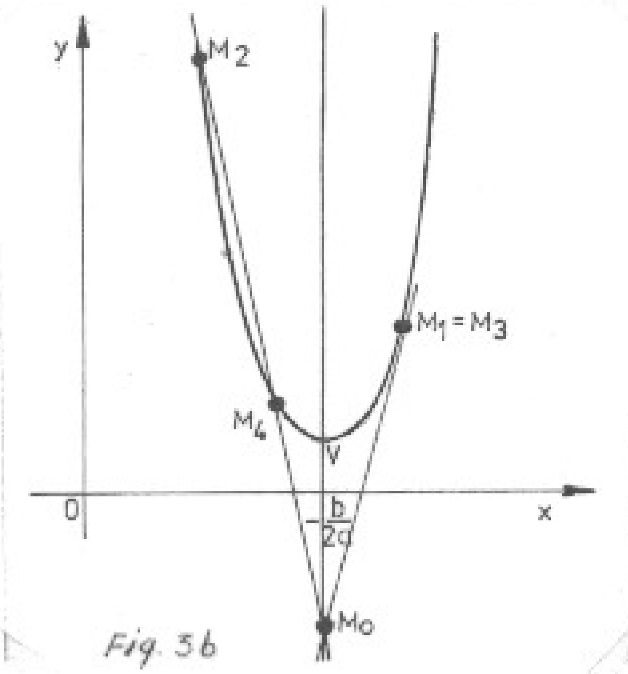


Fig. 3b

Propoziţia 2.3. *Perechea $(G,[\,])$ este un grup ternar semicomutativ cu toate elementele idempotente, fără unitate, izomorf cu grupul ternar $(\mathfrak{R},\circ)$ unde $\mathfrak{R}=\mathbb{R}\setminus\{-\frac{b}{2a}\}$ iar operaţia $\circ: \mathfrak{R}^3 \to \mathfrak{R}$ se defineşte astfel*

$$(x_1,x_2,x_3)_\circ = \frac{x_1x_3+\dfrac{b}{2a}(x_1-x_2+x_3)}{x_2+\dfrac{b}{2a}} \; ; \; x_i\in\mathfrak{R};\; i=1,2,3.$$

Demonstrație.

Se verifică prin calcul direct că oricare ar fi $x_i\in\mathfrak{R}$; $i=\overline{1,5}$, avem

$$((x_1,x_2,x_3)_\circ = (x_1,(x_2,x_3,x_4)_\circ,x_5)_\circ = (x_1,x_2,(x_3,x_4,x_5)_\circ)_\circ =$$

$$= \frac{x_1x_3x_5+\dfrac{b}{2a}(x_1x_3+x_1x_5+x_3x_5-x_2x_4)+\dfrac{b^2}{4a}(x_1-x_2+x_3-x_4+x_5)}{(x_2+\dfrac{b}{2a})(x_4+\dfrac{b}{2a})}$$

adică operația "$\circ$" este asociativă.

De asemenea $(x_1,x_2,x_3)=(x_3,x_2,x_1)_\circ$ și $(x,x,x)_\circ=x$ $\forall x\in\mathfrak{R}$ ceea ce ne arată că fiecare elemnt al lui $\mathfrak{R}$ este idempotent. Ecuațiile $(x,x_2,x_3)_\circ=x_0$; $(x_1,x,x_3)_\circ=x_0$ au soluțiile $x=(x_0,x_3,x_2)_\circ$ respectiv $x=(x_1,x_0,x_3)_\circ$; $\forall$ $x_i\in\mathfrak{R}$; $i=\overline{0,3}$ și prin urmare $(\mathfrak{R},\circ)$ este un grup ternar semicomutativ cu toate elementele idempotente.

Fie acum punctele $M_i(x_i, y_i=ax_i^2+bx_i+c)$; $x_i\neq\frac{b}{2a}$; $i=1,2,3$ distincte, aparținând mulțimii G. Dreapta M_1M_3 intersectează axa de simetrie a parabolei în punctul

$$M_0(-\frac{b}{2a}; -ax_1x_3-\frac{b}{2}(x_1+x_3)+c-\frac{b^2}{2a})$$

Prin calcul direct se determină că abscisa punctului în care dreapta M_0M_2 retaie parabola este tocmai $(x_1,x_2,x_3)_\circ$.

Dacă punctele M_1 și M_3 coincid, dar sunt diferite de M_2, atunci tangenta la parabolă în $M_1(x_1,y_1)$ intersectează axa de simetrie a parabolei în

$$M_0(-\frac{b}{2a},\; -ax_1^2-bx_1+c-\frac{b^2}{2a}) \; .$$

Dreapta M_0M_2 retaie parabola punctul M_4 (Fig.3b) a cărui abscisă,

$$\frac{x_1^2+\frac{b}{a}x_1-\frac{b}{2a}x_2}{x_2+\frac{b}{2a}}$$

coincide cu $(x_1,x_2,x_1)_\circ$. Am demonstrat astfel că abscisa punctului $[M_1,M_2,M_1]$ este tocmai $(x_1,x_2,x_1)_\circ$.

Întrucât $[M_1,M_1,M_3] = [M_3,M_1,M_1] = M_3$ analog relației $(x_1,x_1,x_3)_\circ = (x_3,x_1,x_1)_\circ=x_3$ și $[M_1,M_1,M_1]=M_1$ asemănător cazului $(x_1,x_1x_1)_\circ=x_1$, unificând toate cazurile deducem că aplicația bijectivă $f: G \to \mathbb{R}$ care asociază fiecărui punct al parabolei diferit de vârf abscisa sa, are proprietatea:

$$f([M_1,M_2,M_3]) = (f(M_1),f(M_2),f(M_3))_\circ ;\quad \forall\, M_i\in G ;\ i=1,2,3$$

și conform teoremei 3 din § 1 rezultă că $(G,[\,])$ este grup ternar semicomutativ fără unitate, cu toate elementele idempotente. Transversala fiecărui punct coincide cu el însuși iar soluțiile ecuațiilor $[M,M_2,M_3]=M_\circ$ respectiv $M=[M_1,M_\circ,M_3]$.

Indicăm cititorului să transpună în limbaj geometric asociativitatea operației ternare $[\ \ ]$ ce conferă punctelor parabolei diferite de vârf această structură algebrică.

Observația 2.3. Fixând punctul M_2 în punctul E de abscisă $x_2=1-\frac{b}{2a}$ se obține operația binară $\odot$ definită pe mulțimea $\mathcal{P}\setminus\{V\}$ în lucrarea [4], adică $[M_1,E,M_3]=M_1\odot M_3$.

B I B L I O G R A F I E

1.DÖRNTE,W.: Untersuchungen über einere veralgemain erten Gruppenbegriff, Math.Zeit., 29, 1928, p.1-19

2.KUZNEȚOVA,G.B.: Algebra tocek parabolî, Matematika v școlî, nr.2, 1974, p.74-75

3.POP,S.MARIA: Structuri algebrice definite pe mulţimea punctelor unei parabole, G.M., nr.8/1985, vol.XC, p.273-274

4.MURGULESCU,E. ş.a.: Geometrie analitică şi diferenţială, E.D.P., Bucureşti, 1962

ALGEBRAIC TERNARY STRUCTURES DEFINED ON THE SET OF POINTS OF A PARABOLA

ABSTRACT. In this paper three examples of ternary groups - on the set $\wp$ of the points of a parabola - are given:

1. $(\wp.*)$, where $*$: $\wp \to \wp$ is a ternary semicommutative operation defined as follows:

- if $M_1 \neq M_2 \neq M_3$ then $(M_1,M_2,M_3)_*$ is the point in wich the parallel of M_1M_3 (or of the tangent to $\wp$ in M_1, if $M_1=M_3$) through M_2 intersects again the parabola.
- if $M_1=M_2$ then $(M_1,M_1,M_3)_* = (M_3,M_1,M_1)_* = M_3$
- $(M_1,M_1,M_1)_* = M_1$
- if the tangent to $\wp$ in M_2 is parallel to M_1,M_3, then $(_1,M_2,M_3)_* = M_2$

2. $(\wp,\circ)$, where the commutative operation $\circ$: $\wp^3 \to \wp$ defined as follows:

- if M_1,M_2,M_3 are distinct points then $(M_1,M_2,M_3)_\circ$ is summetrical (relative to the axis of the parabola) to the point in which the circle determined by M_1,M_2,M_3 intersects again the parabola.
- if two of the points coincide ($M_1=M_2$, for example) then $(M_1,M_2,M_3)_\circ$ is symmetrical to the point in which the circle tangent in M_1 to the parabola and containing also M_3, intersects again the parabola.
- $(M_1,M_1,M_1)_\circ$ is symmetrical to the point in which the osculatory circle of the parabola in M_1, intersects again the parabola.

3. ($\wp \setminus \{V\}$) - the vertex of the parabola], [ ]), where the ternary semicommutative operation [ ] is defined as follows:

- if $M_1 \neq M_2 \neq M_3$ then $[M_1, M_2, M_3]$ is the point in which the straight line, determined by M_2 and the intersection of M_1M_3 (or the tangent in M_1 to $\wp$, if $M_1=M_3$) with the symmetry axis, intersects again the parabola.
- if $M_1=M_2 \neq M_3$ then $[M_1, M_1, M_3] = [M_3, M_1, M_1] = M_3$
- $[M_1, M_1, M_1] = M_1$

Propositions 1-3 show the isomorphisms between these structures and some ternary groups defined on the set of real numbers.

UNIVERSITATEA DIN BAIA MARE
Facultatea de Litere şi Ştiinţe
str.Victoriei, 76, 4800 BAIA MARE
ROMÂNIA