Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.2(1992-1993), 41-48

ASUPRA UNOR OPERAŢII CU FUNCŢII PRIMITIVABILE

Dan BĂRBOSU

1. Introducere

Noţiunea de funcţie primitivabilă este cea din [6]. Se ştie [6], că suma a două funcţii primitivabile pe un interval dat este o funcţie primitivabilă pe intervalul considerat, iar produsul şi respectiv compunerea a două funcţii primitivabile nu sunt în general funcţii primitivabile.

Scopul acestei lucrări este de a prezenta condiţii suficiente pentru ca produsul şi respectiv compunerea a două funcţii primitivabile să fie funcţii primitivabile. O primă variantă a acestei lucrări a fost prezentată în anul 1984 [2].

2. Condiţii suficiente de primitivabilitate a produsului de funcţii primitivabile.

Rezultatul principal al acestei secţiuni este exprimat în

2.1. TEOREMĂ: *Fie* $I\subseteq\mathbb{R}$ *interval,* $x_0\in I$, $f,g: I\to\mathbb{R}$. *Dacă:*

i) *f este continuă pe I*

ii) *f este derivabilă cu derivata continuă pe* $I\setminus\{x_0\}$

iii) *f are derivate laterale finite în* x_0

iv) *g este primitivabilă pe I*

atunci funcţia $h: I\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)g(x)$ $(\forall)x\in I$, *este primitivabilă pe I.*

<u>Demonstraţie</u>.

Fie $G:I\to\mathbb{R}$ o primitivă a lui g pe I. Definim funcţia $t:I\to\mathbb{R}$, prin:

$$t(x) = \begin{cases} f'(x)G(x) - f'_s(x_0)G(x_0), & x<x_0 \\ 0, & x=x_0 \\ f'(x)G(x) - f'_d(x_0)G(x_0, & x>x_0 \end{cases}.$$

În baza condiţiilor enunţului, t este continuă pe I, deci primitivabilă pe acest interval. Fie $T \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui t. Arătăm că funcţia $H: I \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$H(x) = \begin{cases} f(x)G(x) - T(x) - f'_s(x_0)G(x_0)(x-x_0), & daca\ x<x_0 \\ f(x_0)G(x_0) - T(x_0), & daca\ x=x_0 \\ f(x)G(x) - T(x) - f'_d(x_0)G(x_0)(x-x_0) & daca\ x>x_0 \end{cases}$$

este o primitivă pe I a lui h.

Într-adevăr, $(\forall)x\in I$, $x<x_0$ avem:

$$H'(x) = f'(x)G(x) + f(x)G'(x) - T'(x) - f'_s(x_0)G(x_0) =$$

$$= f'(x)G(x) + f(x)g(x) - t(x) - f'_s(x_0)G(x_0) =$$

$$= f'(x)G(x) + f(x)g(x) - f'(x)G(x) + f'_s(x_0)G(x_0) - f'_s(x_0)G(x_0) =$$

$$= f(x)g(x) = h(x)$$

De asemenea, $(\forall)x\in I$, $x>x_0$ avem:

$$H'(x) = f'(x)G(x) + f(x)G'(x) - T'(x) - f'_d(x_0)G(x_0) =$$

$$= f'(x)G(x) + f(x)g(x) - t(x) - f'_d(x_0)G(x_0) =$$

$$= f'(x)G(x) + f(x)g(x) - f'(x)G(x) + f'_d(x_0)G(x_0) - f'_d(x_0)G(x_0) =$$

$$= f(x)g(x) = h(x).$$

Deci H este derivabilă pe $I\setminus\{x_0\}$ şi $H'(x)=h(x)$ $(\forall)x\in I\setminus\{x_0\}$.
Rămâne de arătat că H este derivabilă în x_0 şi $H'(x_0)=h(x_0)$.
Avem:

$$H_s'(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)G(x) - T(x) - f_s'(x_0G(x_0)(x-x_0) - f(x_0)G(x_0) + T(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)G(x) - f(x_0)G(x_0)}{x-x_0} - \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{T(x) - T(x_0)}{x-x_0} - f_s'(x_0)G(x_0) =$$

$$= \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x)G(x) - f(x)G(x_0) + f(x)G(x_0) - f(x_0)G(x_0)}{x-x_0} - T_s'(x_0) - f_s'(x_0)G(x_0) =$$

$$= \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)\frac{G(x) - G(x_0)}{x-x_0} + G(x_0)\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x-x_0} - T_s(x_0) - f_s(x_0)G(x_0) =$$

$$= f(x_0)G_s'(x_0) + G(x_0)f_s'(x_0) - t(x_0) - f_s'(x_0)G(x_0) = f(x_0)G'(x_0) =$$

$$= f(x_0)g(x_0) = h(x_0).$$

Analog, $H_d'(x_0) = h(x_0)$. Din cele de mai sus rezultă că H este derivabilă pe I și H'(x)=h(x), (∀)x∈I, ceea ce înseamnă că h este primitivabilă pe I.

Ca aplicații directe ale teoremei 2.1. menționăm:

<u>2.2. Aplicație [7]</u>: Dacă f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este primitivabilă pe $\mathbb{R}$, atunci și g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x)=|x|\cdot f(x)$ este primitivabilă pe $\mathbb{R}$.

<u>2.3. Aplicație [2]</u>: Dacă f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este primitivabilă pe $\mathbb{R}$, atunci și g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x)=|x-a|\cdot f(x)$ $(a\in\mathbb{R})$ este primitivabilă pe $\mathbb{R}$.

<u>2.4. Aplicație [2]</u>: Dacă $a\in\mathbb{R}$, atunci funcția f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} |x-a|\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

este primitivabilă pe $\mathbb{R}$.

Alte aplicații ale teoremei 2.1. se găsesc în lucrările [2], [3], [4], [5], [7], [8], [13], [14].

O generalizare simplă a teoremei 2.1 este exprimată în:

2.5. TEOREMĂ: *Fie* $I \subseteq \mathbb{R}$ *interval,* $A \subset I$ *finită,* $f,g: I \to \mathbb{R}$. *Dacă:*

i) f *este continuă pe* $\hat{I}$

ii) f *este derivabilă cu derivate continue pe* $I \setminus A$

iii) f *are derivate laterale finite în fiecare punct a lui* A

iv) g *este primitivabilă pe* I

atunci funcţia $h: I \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ *este primitivabilă pe* I.

3. Condiţii suficiente de primitivabilitate a compunerii de funcţii primitivabile.

Rezultatul principal al acestei secţiuni este exprimat în:

3.1. TEOREMĂ : *Fie* $I, J \subseteq \mathbb{R}$ *intervale,* $f: I \to J$, $g: J \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. *Dacă*

i) f *este de clasă* C^1 *pe* I *şi* $f'(x) \neq 0$, $(\forall) x \in I$

ii) f *este de clasă* C^2 *pe* $I \setminus \{x_0\}$

iii) f *are derivate laterale de ordinul doi finite în* x_0

iv) g *este primitivabilă pe* J

atunci funcţia $h: I \to \mathbb{R}$, $h(x) = (g \circ f)(x), (\forall) x \in I$ *este primitivabilă pe* I.

Demonstraţie: Fie $G: J \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui g. Introducem funcţia $t: I \to \mathbb{R}$, punând:

$$t(x) = \begin{cases} (G \circ f)(x) \dfrac{f''(x)}{(f'(x))^2} = -(G \circ f)(x_0) \cdot \dfrac{f''_s(x_0)}{(f'(x_0))^2}, \ daca \ x < x_0 \\ 0, \ daca \ x = x_0 \\ (G \circ f)(x) \dfrac{f''(x)}{(f'(x))^2} - (G \circ f)(x_0) \dfrac{f''_d(x_0)}{(f'(x_0))^2}, \ daca \ x > x_0 \end{cases}$$

Evident t este continuă pe I. Fie $T: I \to \mathbb{R}$ o primitivă a ei. Arătăm că $H: I \to \mathbb{R}$, definită prin:

$$H(x) = \begin{cases} (G\circ f)(x)\dfrac{1}{f'(x)} + T(x) + (x-x_0)\dfrac{f_s''(x_0)}{(f'(x_0))^2}(G\circ f)(x_0), & x<x_0 \\ (G\circ f)(x_0)\dfrac{1}{f'(x_0)} + T(x_0), & x=x_0 \\ (G\circ f)(x)\dfrac{1}{f'(x)} + T(x) + (x-x_0)\dfrac{f_d''(x_0)}{(f'(x_0))^2}(G\circ f)(x_0), & x>x_0 \end{cases}$$

este o primitivă pe I a lui H.

Într-adevăr, $(\forall)x\in I$, $x<x_0$ avem:

$$H'(x) = \frac{(g\circ f)(x)(f'(x))^2 - f''(x)(G\circ f)(x)}{(f'(x))^2} + t(x) + \frac{f_s''(x_0)}{(f'(x_0))^2}(G\circ f)(x_0) =$$

$$= (g\circ f)(x) - \frac{f''(x)(G\circ f)(x)}{(f'(x))^2} + (G\circ f)(x)\frac{f''(x)}{(f'(x))^2} - \frac{(f_s''(x_0)}{(f'(x_0))^2}(G\circ f)(x_0) +$$

$$+ \frac{f_s''(x_0)}{(f'(x_0))^2}(G\circ f)(x_0) = (g\circ f)(x) = h(x)$$

Un calcul analog arată că $(\forall)x\in I$, $x>x_0$ avem $H'(x)=h(x)$. Ramâne deci de arătat că H este derivabilă în x_0 și $H'(x_0)=h(x_0)$.

$$H_s'(x_0) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{(G\circ f)(x)\dfrac{1}{f'(x)} + T(x) + (x-x_0)\dfrac{f_s''(x_0}{(f'(x_0))^2}(G\circ f)(x_0)}{x-x_0} -$$

$$- \frac{\dfrac{1}{f'(x_0)}(G\circ f)(x_0) + T(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{(G\circ f)(x)\dfrac{1}{f'(x)} - (G\circ f)(x_0)\dfrac{1}{f'(x_0)}}{x-x_0} +$$

$$+ \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{T(x)-T(x_0)}{x-x_0} + \frac{f_s''(x_0)}{(f'(x_0))^2}(G\circ f)(x_0) =$$

$$= \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f'(x_0)(G\circ f)(x) - f'(x)(G\circ f)(x_0)}{f'(x)f'(x_0)(x-x_0)} + T_s'(x_0) + \frac{f_s''(x_0)}{f'(x_0))^2}(G\circ f)(x_0) =$$

$$= \frac{1}{(f'(x_0))^2} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f'(x_0)(G\circ f)(x)-f'(x_0)(G\circ f)(x_0)}{x-x_0} +$$

$$+ \frac{f'(x_0)(G\circ f)(x_0)-f'(x)(G\circ f)(x_0)}{x-x_0} + t(x_0) + \frac{f''_s(x_0)}{(f'(x_0))^2}(G\circ f)(x_0) =$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{(G\circ f)(x)-(G\circ f)(x_0)}{f(x)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} -$$

$$- \frac{(G\circ f)(x_0)}{(f'(x_0))^2} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} + t(x_0) + \frac{f''_s(x_0)}{(f'(x_0))^2}(G\circ f)(x_0) =$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)} G'(f(x_0))f'(x_0) - \frac{(G\circ f)(x_0)}{(f'(x_0))^2} f''_s(x_0) + 0 + \frac{(G\circ f)(x_0)}{(f'(x_0))^2} f''_s(x_0) =$$

$$= (g\circ f)(x_0) = h(x_0).$$

Analog se arată că $H'_d(x_0)=h(x_0)$. Prin urmare h este derivabilă pe I şi $H'(x)=h(x)$, $(\forall)x\in I$.

Ca aplicaţii imediate ale teoremei 3.1 menţionăm:

<u>3.2. Aplicaţie [8]</u>. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitivabilă pe $\mathbb{R}$ atunci $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $g(x)=f(x(1+|x|))$ este primitivabilă pe $\mathbb{R}$.

<u>3.3. Aplicaţie [8]</u>. Dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este de clasă $C^2(\mathbb{R})$ şi $f'(x)\neq 0$ $(\forall)x\in\mathbb{R}$ iar $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitivabilă pe $\mathbb{R}$, atunci $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitivabilă pe $\mathbb{R}$.

Alte aplicaţii ale teoremei 3.1 se găsesc în lucrările [1], [2], [3], [4], [5], [7], [8], [13], [14].

O generalizare imediată a teoremei 3.1 este exprimată în

3.4. TEOREMĂ: *Fie* $I,J\subseteq\mathbb{R}$ *intervale*, $A\subset I$*-finită*, $f:I\to J$, $g:J\to\mathbb{R}$. *Dacă:*

i) f *este de clasă* $C^1(I)$ *şi* $f'(x)\neq 0$, $(\forall)x\in I$

ii) f *este de clasă* C^2 *pe* $I\setminus A$

iii) f *au derivate laterale de ordinul doi finite în fiecare punct a lui* A

iv) g *este primitivabilă pe* I

atunci funcţia $h:I\to\mathbb{R}$, $h(x)=(g\circ f)(x)$, $(\forall)x\in I$ *este primitivabilă pe* I.

B I B L I O G R A F I E

1. ANDRICA,D.: Asupra unei clase largi de funcţii primitivabile, Gazeta Matematică, Perfecţionare metodică şi metodologică în matematici şi informatică 4(1986), 169-176

2. BĂRBOSU,D.: Clase de funcţii primitivabile, lucrare prezentată la sesiunea de referate şi comunicări, Baia Mare, noiembrie 1984

3. BĂTINEŢU,D.M., ş.a.: Exerciţii şi probleme de analiză matematică pentru clasele a IX-a şi a XII-a, Ed.did. şi ped., Bucureşti, 1981

4. BĂTINEŢU-GIURGIU,D.M., ş.a.: Analiză matematică, Exerciţii şi probleme, Ed.militară, Bucureşti, 1992

5. BERINDE,V.: O clasă de funcţii discontinue primitivabile, Gazeta Matematică, 6(1989), 214-220

6. BOBOC,N., COLOJOARĂ,I.: Elemente de analiză matematică, manual pentru clasa a XII-a, Ed. did. şi ped., Bucureşti, 1982

7. GANGA,M.: Teme şi probleme de matematică, Ed.tehnică, Bucureşti, 1991

8. GAZETA MATEMATICĂ: colecţie 1980-1992

9. MUNTEAN,I.: Asupra primitivabilităţii şi integrabilităţii funcţiilor continue I,II, Gazeta Matematică, Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, 12(1981), 60-67; 165-175

10.MUNTEAN,I.: Primitive şi primitive generalizate. Lucrările seminarului de Didactica matematicii, Univ. Babes-Bolyai, Cluj-Napoca, Facultatea de matematică, 1985-1986, 129-152

11.NICOLESCU,M: Analiză matematică, vol.I,II, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1958

12.PĂLTĂNEA,E.: O clasă de funcţii care admit primitive, Gazeta Matematică, Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică 3-4(1982), 137-146

13.PETRACOVICI,L.: În legătură cu existenţa primitivelor unor funcţii reale, Lucrările Seminarului de creativitate matematică, Univ. din Baia Mare, vol.I(1991-1992), 105-122

14.SIREŢCHI,Gh.: Calcul diferenţial şi integral I,II, Ed.Şt. şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985

15.VULPESCU-JALEA,F.: Asupra unor funcţii primitivabile, Gazeta Matematică, Perfecţionare metodică şi metodologică în matematică şi informatică, 3-4(1981), 159-166.

ON THE PRODUCT AND THE COMPOSITION OF THE PRIMITIVABLE FUNCTIONS

ABSTRACT. Sufficiently conditions for the primitivability of the product and respectively the composition of two primitivable functions are presented.

UNIVERSITATEA DIN BAIA MARE
Facultatea de Litere şi Ştiinţe
str.Victoriei, 76, 4800, BAIA MARE
ROMÂNIA