Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.2(1992-1993), 55-60

O GENERALIZARE A UNEI PROBLEME A LUI A.G.IOACHIMESCU

Vasile BERINDE

În primul număr al Gazetei Matematice, din 15 septembrie 1895, apare următoarea problemă, propusă de unul din fondatorii şi stâlpii acesteia, Andrei Gh.Ioachimescu:

P1. Fie $$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}\ . \qquad (1)$$

Să se arate că:

1) S_n este negativ şi creşte în valoare absolută, când n creşte;

2) dacă n tinde către infinit, S_n tinde către o limită finită cuprinsă între -2 şi -1.

Că această problemă rămâne actuală, atât prin conţinut cât şi prin enunţul său, o dovedeşte includerea ei în câteva culegeri de probleme recente [1], [4], [5], dar şi în manualul de clasa a X-a [3], unde apare o dublă inegalitate legată de şirul (1).
De altfel, în [5], şirul lui Ioachimescu este complet studiat, prin exerciţiile 8,20,56,83 şi 147, arătându-se că dintre toate şirurile $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definite prin relaţia

$$b_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\alpha\sqrt{n}\ ,\quad n\geq 1\ ,$$

cu $\alpha\in\mathbb{R}$, numai şirul dat de (1), este convergent, el obţinându-se pentru $\alpha=2$.
În plus, este dat şi ordinul de convergenţă al acestui şir, prin intermediul relaţiilor

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < S_n - s < \frac{1}{2\sqrt{n}} \tag{2}$$

respectiv

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(S_n - s) = \frac{1}{2}, \tag{3}$$

unde s este limita şirului $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

Scopul acestei note este de a da o generalizare a problemei lui Ioachimescu care include toate rezultatele anterioare, adică de a rezolva problema

P2. Fie $p\in\mathbf{N}^*$, $p\geq 2$ un număr dat şi $(S_n)_{n\geq 1}$ şirul definit prin

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[p]{2^{p-1}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[p]{n^{p-1}}} - p\sqrt[p]{n}, \ n\geq 1. \tag{4}$$

Să se arate că:

(i) (S_n) este convergent;

(ii) Dacă $s = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ atunci $s\in[-p, 1-p]$;

(iii) Ordinul de convergenţă al şirului este dat de relaţiile

$$\frac{1}{p\sqrt[p]{n+1}} < S_n - s < \frac{1}{p\sqrt[p]{n}}, \tag{5}$$

respectiv

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{n}(S_n - s) = \frac{1}{p}. \tag{6}$$

Pentru aceasta, vom demonstra mai întâi dubla inegalitate

$$p(\sqrt[p]{k+1} - \sqrt[p]{k}) < \frac{1}{\sqrt[p]{k^{p-1}}} < p(\sqrt[p]{k} - \sqrt[p]{k-1}), \ k\geq 1. \tag{7}$$

Într-adevăr

$$\frac{1}{\sqrt[p]{k^{p-1}}} = \frac{p}{\underbrace{\sqrt[p]{k^{p-1}} + \sqrt[p]{k^{p-1}} + \ldots + \sqrt[p]{k^{p-1}}}_{de\ p\ ori}},$$

de unde, pe baza inegalității evidente

$$k-1 < k < k+1,$$

obținem

$$\frac{1}{\sqrt[p]{k^{p-1}}} < \frac{p}{\sqrt[p]{k^{p-1}} + \sqrt[p]{k^{p-2}\cdot(k-1)} + \ldots + \sqrt[p]{k(k-1)^{p-2}} + \sqrt[p]{(k-1)^{p-1}}},$$

respectiv

$$\frac{1}{\sqrt[p]{k^{p-1}}} > \frac{p}{\sqrt[p]{(k+1)^{p-1}} + \sqrt[p]{(k+1)^{p-2}}\cdot k + \ldots + \sqrt[p]{k^{p-1}}}.$$

Amplificăm acum în membrul drept al ultimei inegalități cu $\sqrt[p]{k+1}-\sqrt[p]{k}$ și obținem tocmai

$$p(\sqrt[p]{k+1}-\sqrt[p]{k}) < \frac{1}{\sqrt[p]{k^{p-1}}} \tag{8}$$

În mod analog se obține a doua inegalitate din (7). Dacă luăm acum, pe rând, k=1,2,...n în (8) și însumăm toate aceste n inegalități obținem

$$p(\sqrt[p]{n+1}-1) < S_n + p\sqrt[p]{n},$$

așadar

$$S_n > p(\sqrt[p]{n+1} - \sqrt[p]{n}) - p, \quad deci \quad S_n > -p, \ \forall\, n\in\mathbb{N}^*. \tag{9}$$

Pe de altă parte,

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{\sqrt[p]{(n+1)^{p-1}}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n^{p-1}}} + p(\sqrt[p]{n} - \sqrt[p]{n+1}) \ ,$$

de unde deducem

$$S_{n+1} - S_n < 0 \ , \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^* \ ,$$

deci (S_n) este descrescător. Prin urmare $S_n \leq S_1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce înseamnă

$$S_n \leq 1-p \ , \ n \geq 1 \ .$$

Aşadar (S_n) este convergent şi satisface (ii).

Pentru a demonstra dubla inegalitate (5), arătăm că

$$s < S_n - \frac{1}{p\sqrt[p]{n+1}} \tag{10}$$

şi

$$S_n - \frac{1}{p\sqrt[p]{n}} < s \ .$$

Notăm, mai întâi,

$$b_n = S_n - \frac{1}{p\sqrt[p]{n+1}} \ , \ n \geq 1 \ .$$

este clar că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = s$. Mai mult, din

$$b_{n-1} - b_n = S_{n+1} - S_n + \frac{1}{p}\left(\frac{1}{\sqrt[p]{n+2}} - \frac{1}{\sqrt[p]{n+1}}\right) \ ,$$

ţinând seama de faptul că (S_n) este descrescător obţinem

$$b_{n+1} - b_n < 0 \ ,$$

deci (b_n) este descrescător. Prin urmare (b_n) converge descrescător către s, adică are loc (10).

În mod asemănător se arată că (a_n), $a_n = S_n - \frac{1}{p\sqrt[p]{n}}$, converge crescător către s. Împărțind (5), membru cu membru, cu $\sqrt[p]{n}$, și trecând la limită obținem, pe baza criteriului cleștelui, tocmai relația (6).

Problema 2 este acum complet rezolvată.

Observații. 1) La fel ca în cazul p=2 se arată că dintre toate șirurile $(b_n)_{n\geq 1}$

$$b_n = 1 + \frac{1}{\sqrt[p]{2^{p-1}}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[p]{n^{p-1}}} - \alpha\sqrt[p]{n}, \quad n\geq 1,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

numai șirul obținut pentru $\alpha=p$, adică cel dat de (4), este convergent.

2) Pentru p=2, din problema P2 obținem toate exercițiile citate din [5], care includ problema P1. De asemenea, cu ajutorul inegalității (7) obținem o generalizare a problemei 5, punctul d), pag.41, din [4].

3) Dacă, în (1), $2\sqrt{n}$ se înlocuiește cu $2\sqrt{n+1}$ obținem o problemă dată la admitere la Facultatea de Matematică în 1987, vezi [2].

B I B L I O G R A F I E

1. BĂTINEŢU-GIURGIU,D.M., ş.a.: Analiză matematică. Exerciţii şi probleme, Editura Militară, Bucureşti, 1992

2. BECHEANU,M.,ş.a.: Probleme de algebră, geometrie şi analiză matematică, Ed.Cartea Românească, Bucureşti, 1991.

3. NĂSTĂSESCU,C., ş.a.: Algebră, manual pentru clasa a X-a, E.D.P., 1993

4. SIREŢCHI,Gh.: Calcul diferenţial şi integral, vol.2, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985

5. VERNESCU,A.: Analiză matematică. 353 probleme rezolvate, vol.1, Editura Pantheon, Bucureşti, 1992, ed. a II-a.

A GENERALIZATION OF A PROBLEM OF A.G.IOACHIMESCU

ABSTRACT. In this note we study the sequence $(S_n)_{n\geq 1}$, given by (4). It is shown that (S_n) is convergent, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \in [-p, 1-p]$ and the order of convergence is given by (5) or (6).

In the particular case p=2, we obtain a problem from the first issue of Gazeta Matematică, in 1895, due to A.G.Ioachimescu, one of the founders of this old Romanian magazine.

UNIVERSITATEA DIN BAIA MARE
Facultatea de Litere şi Ştiinţe
str.Victoriei, 76, 4800, BAIA MARE
ROMÂNIA