Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.2(1992-1993), 49-53

O CARACTERIZARE ÎN PLANUL COMPLEX A TRIUNGHIURILOR ASEMENEA

Nicolae MUŞUROIA

La Olimpiada naţională de matematică, Tîrgovişte 1987, a fost propusă problema:

P1. Se dă un triunghi ABC şi în interiorul său se consideră triunghiul A'B'C' asemenea cu triunghiul dat şi având aceeaşi orientare (adică vârfurile celor două triunghiuri sunt notate în acelaşi sens de rotaţie). Fie A",B",C" aparţnând segmentelor (AA'), (BB'), (CC'), astfel încât $\frac{AA''}{A''A'} = \frac{BB''}{B''B'} = \frac{CC''}{C''C'}$.

Să se arate că $\Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC$.

Soluţia autorului, I.Tomescu, se poate consulta în [1], pag.272.

Soluţia pe care o propunem utilizează numerele complexe. Pentru aceasta, prezentăm mai întâi câteva caracterizări în complex, pentru triunghiurile asemenea.

În cele ce urmează vom nota cu litere mari punctele planului complex şi cu litere mici corespunzătoare, afixele lor.

Reamintim câteva rezultate, referitoare la aplicaţiile numerelor complexe în geometrie, unele cunoscute din lecţiile de la clasă.

1). Distanţa dintre punctele A şi B este $AB = |a-b|$.

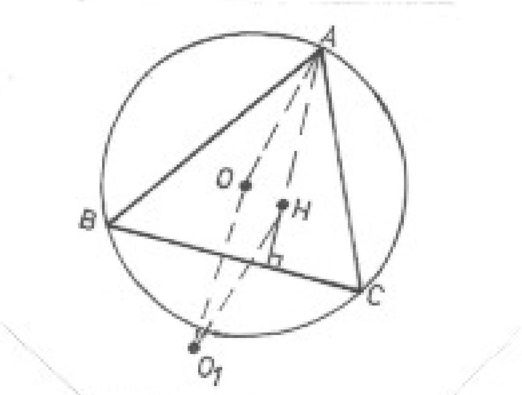
2). Măsura unghiului orientat $\angle ABC$ este $\arg\frac{c-b}{a-b}$ (a se vedea problema 6, pag.50, manual de geometrie, clasa a X-a, 1986).

3). Afixul punctului M care împarte segmentul (AB) în raportul k, adică $\frac{MA}{AB}=k$ este $m=ka+(1-k)b$.

În particular afixul g al centrului de greutate al triunghiului ABC este $g=\frac{a+b+c}{3}$.

4). Față de un reper cu originea în centrul cercului circumscris triunghiului ABC, afixul ortocentrului H este $h=a+b+c$, iar al centrului cercului lui Euler este $e=\frac{a+b+c}{2}$.

<u>Demonstrație</u>



Fie O_1 simetricul lui O față de BC. Atunci OO_1HA paralelogram, deci $h = a+o_1=a+b+c$.
Fie A_1 mijlocul segmentului (BC), D piciorul înălțimii, D_1 mijlocul (AH). Deci A_1,D,D_1 sunt puncte pe cercul lui Euler, de centru E, mijlocul segmentului (A_1D_1).

Deci $e = \frac{a_1+d_1}{2}=\frac{\frac{b+c}{2}+\frac{a+b}{2}}{2}=\frac{a+b+c}{2}$.

TEOREMĂ [2]. *Următoarele afirmații sunt echivalente:*

1) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

2) $\frac{b-a}{c-a}=\frac{b'-a'}{c'-a'}$

3) $a'(b-c)+b'(c-a)+c'(a-b) = 0$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = 0$.

Demonstrație

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} \\ \angle CAB \equiv \angle C'A'B' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{a-b}{a-c}\right| = \left|\dfrac{a'-b'}{a'-c'}\right| \\ arg\dfrac{b-a}{c-a} = arg\dfrac{b'-c'}{c'-a'} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{b-a}{c-a} = \frac{b'-a'}{c'-a'} .$$

Deci 1) $\Leftrightarrow$ 2). Evident 2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4).
Dăm acum câteva aplicații.

Soluția problemei P1.

Deoarece $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, rezultă $a'(b-c)+b'(c-a)+c'(a-b) = 0$.

Dar $a'' = \lambda a+(1-\lambda)a'$, $b'' = \lambda b+(1-\lambda)b'$, $c'' = \lambda c+(1-\lambda)c'$ unde

$$\lambda = \frac{AA''}{A''A'} = \frac{BB''}{B''B'} = \frac{CC''}{C''C'} .$$

Atunci, după efectuarea calculelor obținem:

$a''(b-c)+b''(c-a)+a''(a-b) = 0$, adică $\Delta A''B''C'' \sim \Delta ABC$.

P2. Dacă triunghiurile ABC și A'B'C' sunt direct asemenea și dintr-un punct O din plan ducem segmentele (OA_1), (OB_1), (OC_1) congruente și paralele cu AA', BB', CC', atunci $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ [2].

Soluție. Deoarece $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, avem

$$a'(b-c)+b'(c-a)+c'(a-b) = 0 .$$

Dar $a'=a+a_1$, $b'=b+b_1$, $c'=c+c_1$.
Înlocuind și efectuând calculele obținem:

$$a_1(b-c)+b_1(c-a)+c_1(a-b) = 0 ,$$

adică $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$.

P3. Să se arate că dacă punctul M aparține cercului circumscris triunghiului ABC, atunci centrele cercurilor lui Euler ale triunghiurilor MBC, MCA, MAB formează un triunghi asemenea cu triunghiul ABC. (C.1155, G.M. 7/1991).

Soluţie. Fie E_1, E_2, E_3 centrele cercurilor lui Euler ale triunghiurilor MBC, MCA, MAB. Atunci:

$$e_1 = \frac{m+b+c}{2}\ ,\quad e_2 = \frac{m+a+c}{2}\ ,\quad e_3 = \frac{m+a+b}{2}\ .$$

Efectuând calculele obţinem:

$$e_1(b-c)+e_2(c-a)+e_3(a-b) = 0\ ,$$

deci $\Delta E_1E_2E_3 \sim \Delta ABC$.

În final propunem cititorului să soluţioneze (eventual şi cu alte metode) următoarele două probleme.

P4. Să se arate că dacă punctul M aparţine cercului circumscris triunghiului ABC atunci triunghiurile formate de ortocentrele, centrele de greutate respectiv centrele cercurilor lui Euler ale triunghiurilor MBC, MCA, MAB sunt asemenea cu ΔABC.

P5. Pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC se consideră punctele A',B',C' astfel încât $\frac{A'B}{A'C}=\frac{B'C}{B'A}=\frac{C'A}{C'B}=k$. Pe laturile B'C', C'A', A'B' se consideră punctele A",B",C" astfel încât $\frac{A''C'}{A''B'}=$ $=\frac{C''B'}{C''A'}=\frac{B''A'}{B''C'}=k$.

Să se arate că $\Delta ABC \sim \Delta A''B''C''$. (C.Caragea, G.M. 2/1980).

Concluzii. Să remarcăm eleganţa şi simplitatea soluţiilor cu numere complexe. Suportul teoretic este destul de simplu şi poate fi abordat chiar la sfârşitul clasei a IX-a, punând la dispoziţia elevilor participanţi la concursurile de matematică un instrument în plus, care în anumite condiţii poate fi deosebit de eficace.

B I B L I O G R A F I E

1.BATINEŢU,D.M., GIURGIU şi colab.: Probleme date la olimpiadele de matematică pentru licee, Ed.Ştiinţifică, Bucureşti, 1992.

2.MIHĂILESCU,N.: Utilizarea numerelor complexe în geometrie, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1968.

3.MUŞUROIA,N.: Aplicaţii ale numerelor complexe în geometria plană, Lucrare metodico-ştiinţifică pentru obţinerea gradului didactic I, Baia Mare, 1992.

4.NICOLESCU,L., BOSKOFF,V.: Probleme practice de geometrie, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1990.

5.VIRGILIUS,D.: Condiţii ca trei numere complexe să fie afixele vârfurilor unui triunghi echilateral, Astra Matematică, vol.I, nr.2, 1990.

A CHARACTERIZATION OF SIMILAR TRIANGLES IN THE COMPLEX PLANE

ABSTRACT. In this article a few problems concerning similar triangles are solved using complex numbers;

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow a'(b-c)+b'(c-a)+c'(a-b)=0$$

where small letters are affixes of the corespondent vertex of the triangle.

LICEUL "GH.ŞINCAI"
4800 BAIA MARE
ROMÂNIA