Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.2(1992-1993), 61-69

PROPRIETĂŢI DE COLINEARITATE DEDUSE DIN IZOGONALITATE

Nicolae OPREA

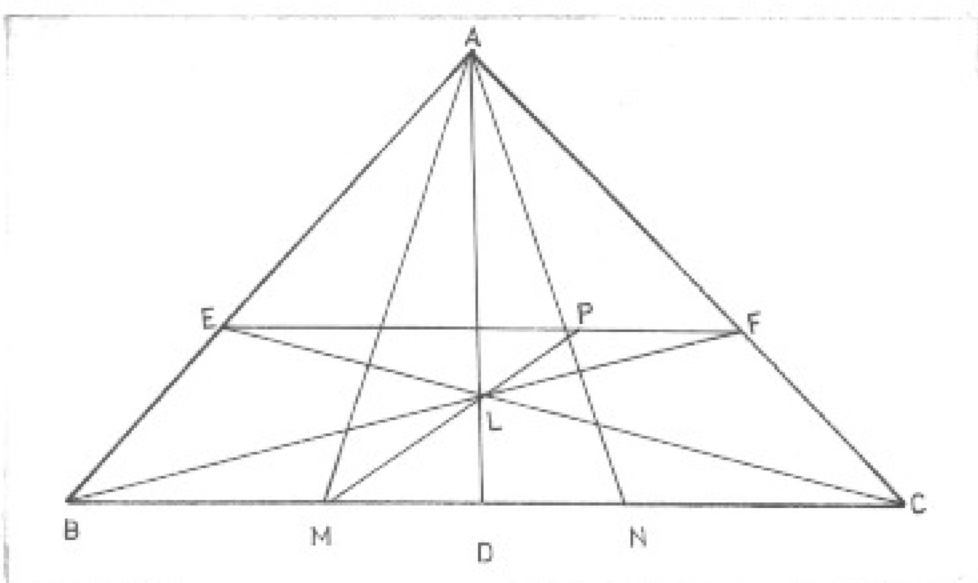
În această lucrare vom obţine câteva rezultate foarte interesante atât din punct de vedere al originalităţii lor cât şi din punct de vedere al utilităţii lor în rezolvarea unor probleme foarte dificile.

Pentru demonstrarea acestor rezultate ne vom folosi de următoarele teoreme publicate în lucrarea [1]:

TEOREMA 1: *Dacă într-un triunghi oarecare ABC se duc cevienele AD,BF şi CE concurente într-un punct L şi dacă pe BC şi EF se iau respectiv punctele M şi P astfel încât M,L şi P să fie coliniare atunci există relaţia:*

$$\frac{BD^2}{DC^2} = \frac{BM}{MC}\frac{BN}{NC}$$

unde $\{N\}=BC\cap AP$.



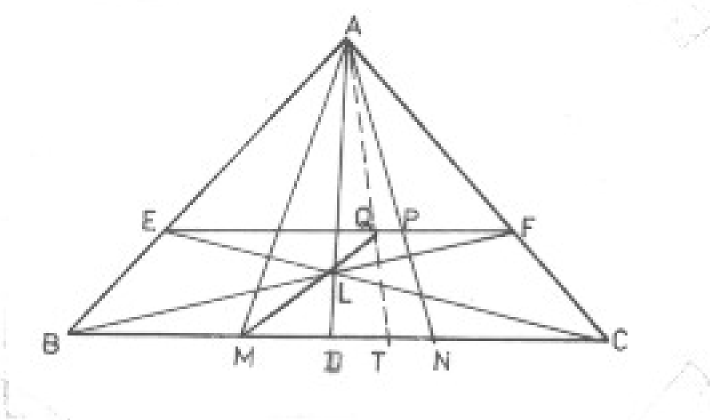
TEOREMA 2: *Dacă pe laturile (AB), (AC) ale unui triunghi oarecare ABC se iau respectiv punctele E,F, secanta EF trece prin punctul lui LEMOINE, K al triunghiului ABC dacă şi numai dacă există relaţia:*

$$b^2\frac{EB}{EA}+c^2\frac{FC}{FA} = a^2$$

În cele ce urmează vom obţine următoarele rezultate:

TEOREMA 3: *Dacă cevienele BF şi CE se intersectează într-un punct L de pe bisectoarea [AD a unui triunghi oarecare ABC şi dacă AM şi AN sunt ceviene izogonale ale triunghiului ABC şi $\{P\}=EF\cap AN$ atunci punctele M,L şi P sunt coliniare.*

<u>Demonstraţie</u>



Vom demonstra această teoremă prin metoda reducerii la absurd. Presupunem prin absurd că punctele M,L şi P nu sunt coliniare, deci $P\notin ML$. Dacă $P\notin ML$ notăm cu $\{Q\}=EF\cap ML$ $(P\neq Q)$ şi fie $\{T\}=AQ\cap BC$ evident $T\neq N$.

În aceste condiţii, conform teoremei 3, avem relaţia:

$$\frac{BD^2}{DC^2} = \frac{BM}{MC}\frac{BT}{TC} \text{ .}$$

Din această relaţie şi din teorema bisectoarei obţinem relaţia:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BM}{MC}\frac{BT}{TC} \tag{1}$$

Pe de altă parte, deoarece AM şi AN sunt ceviene izogonale în triunghiul ABC conform relaţiei lui STEINER avem relaţia:

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BM}{MC}\frac{BN}{NC} \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) deducem că:

$$\frac{BN}{NC} = \frac{BT}{TC}$$

ceea ce este o contradicţie, există numai un singur punct care să împartă segmentul (BC) într-un raport dat.

În continuare vom da câteva consecinţe ale acestei teoreme, consecinţe care rezultă imediat din această teoremă.

CONSECINŢA 3.1.

Dacă cevienele BF şi CE se intersectează într-un punct L de pe bisectoarea AD a unui triunghi ABC şi dacă ceviana AM ($M \in BC$) trece prin centrul O al cercului circumscris triunghiului ABC şi $\{P\}=EF \cap ML$ atunci $AP \perp BC$.

CONSECINŢA 3.2.

Dacă într-un triunghi oarecare ABC se duc bisectoarele interioare [BF şi [CE care se intersectează în punctul I şi dacă $AM \perp BC$ ($M \in BC$) şi $\{P\}=EF \cap MI$, atunci dreapta AP trece prin centrul cercului circumscris triunghiului ABC.

CONSECINŢA 3.3.

Dacă într-un triunghi neisoscel ABC se duc bisectoarele [BF şi [CE care se intersectează în punctul I şi dacă simediana AN a triunghiului ABC intersectează pe EF în P, atunci dreapta IP intersectează înălţimea coborâtă din A într-un punct Q astfel încât AQ=r, unde r este raza cercului înscris triunghiului ABC.

Demonstraţie

În lucrarea [2], la pagina 83 este dată şi demonstrată problema M.53 care are următorul enunţ (notaţiile fiind schimbate).

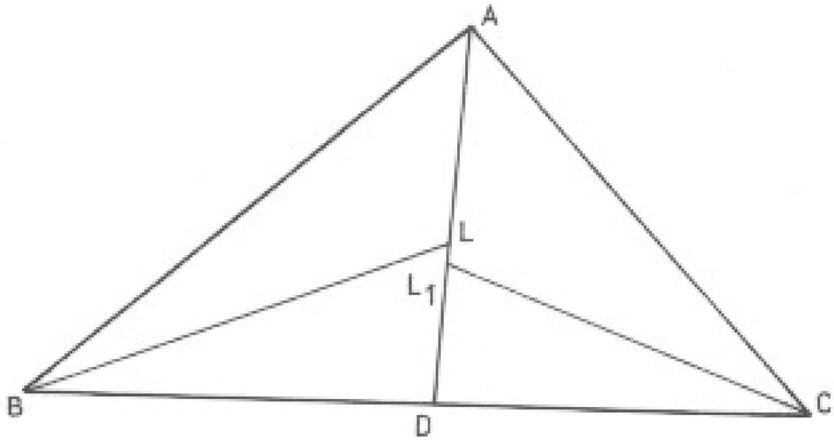
"În triunghiul neisoscel ABC prin mijlocul M al laturii (BC) şi prin centrul I al cercului înscris se duce dreapta MI care intersectează înălţimea coborâtă din A în punctul Q. Să se demonstreze că AQ este egal cu raza cercului înscris".

Bazându-ne pe această problemă şi pe teorema 3, rezultă că punctele M,T şi Q sunt coliniare, deci AQ=r.

TEOREMA 4: *Dacă într-un triunghi oarecare ABC se duce bisectoarea [AD, atunci simediana din B a triunghiului ABD intersectează simediana din C a triunghiului ADC într-un punct L situat pe (AD).*

Demonstraţie

Vom demonstra folosind metoda reducerii la absurd. Presupunem prin absurd că cele două simediane nu se intersectează pe (AD).



Notăm cu $L \in (AD)$ piciorul simedianei din B a triunghiului ABD şi cu $L_1 \in (AD)$ piciorul simedianei din C a triunghiului ADC, $L \neq L_1$ (datorită presupunerii făcute).

Din teorema simedianei rezultă relaţiile:

$$\frac{AB^2}{BD^2} = \frac{AL}{LD} \tag{1}$$

şi

$$\frac{AC^2}{DC^2} = \frac{AL_1}{L_1D} \tag{2}$$

Pe de altă parte [AD fiind bisectoare în triunghiul ABC, conform teoremei bisectoarei avem

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

de unde deducem relaţia

$$\frac{AB^2}{BD^2} = \frac{AC^2}{DC^2} \tag{3}$$

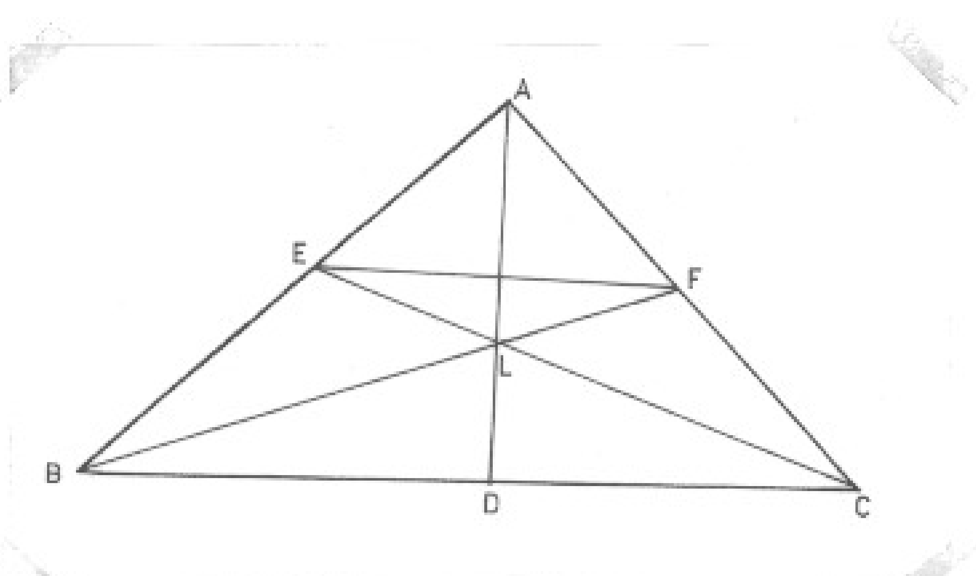
Din relaţiile (1),(2) şi (3) rezultă că

$$\frac{AL}{LD} = \frac{AL_1}{L_1D}$$

ceea ce este o contradicţie, există numai un singur punct interior lui (AD) care să-l împartă într-un raport dat, deci L=L, adică simediana din B a triunghiului ABD intersectează simediana din C a triunghiului ADC într-un punct $L\in(AD)$.

TEOREMA 5: *Dacă [AD este bisectoarea unui triunghi oarecare AB şi dacă simediana din C a triunghiului ADC intersectează pe (AB) în E şi simediana din B a triunghiului ABD intersectează pe (AC) în F, atunci EF trece prin punctul lui LEMOINE K al triunghiului ABC.*

<u>Demonstraţie</u>



Din teorema 4 ştim că simediana din B a triunghiului ABD intersectează simediana din C a triunghiului ADC într-un punct $L\in(AD)$.

Din teorema simedianei şi din teorema bisectoarei deducem relaţia

$$\frac{AL}{LD} = \frac{(b+c)^2}{a^2} \tag{1}$$

Pe de altă parte din teorema lui Menelaus aplicată triunghiului ABD cu transversala EC deducem relaţia

$$\frac{EB}{EA} = \frac{LD}{AL}\frac{BC}{DC}$$

dar

$$\frac{BC}{DC} = \frac{b+c}{b} \quad \text{(teorema bisectoarei)}$$

deci

$$\frac{EB}{EA} = \frac{LD}{AL}\frac{b+c}{b} \tag{2}$$

Din relaţiile (1) şi (2) deducem că

$$\frac{EB}{EA} = \frac{a^2}{b(b+c)} \tag{3}$$

Analog se deduce relaţia

$$\frac{FC}{FA} = \frac{a^2}{c(b+c)} \tag{4}$$

Din relaţiile (3) şi (4) deducem că

$$b^2\frac{EB}{EA}+c^2\frac{FC}{FA} = \frac{a^2b+a^2c}{b+c} = a^2$$

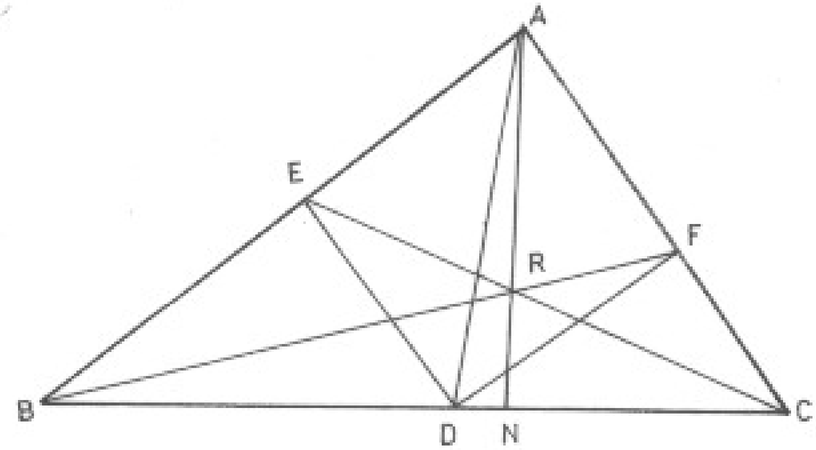
adică

$$b^2\frac{EB}{EA}+c^2\frac{FC}{FA} = a^2$$

relație care conform teoremei 2 exprimă faptul că EF trece prin punctul lui LEMOINE, K al triunghiului ABC.

TEOREMA 6: *Dacă [AD este bisectoarea unui triunghi oarecare ABC și dacă E∈(AB) este piciorul somedianei din D a triunghiului ABD, F∈(AC) este piciorul simedianei din D a triunghiului ADC și {R} = BF∩CE și {N} = BC∩AR atunci AN este simediană în triunghiul ABC.*

Demonstrație



Deoarece cevienele AN, BF și CE sunt concurente în R din teorema lui CEVA deducem relația:

$$\frac{BN}{NC} = \frac{BE}{EA}\frac{AF}{FC} \tag{1}$$

Pe de altă parte din teorema simedianei rezultă că

$$\frac{BE}{EA} = \frac{BD^2}{AD^2} \quad si \quad \frac{AF}{FC} = \frac{AD^2}{DC^2}$$

Din aceste relații și din relația (1) obținem

$$\frac{BN}{NC} = \frac{BD^2}{DC^2}$$

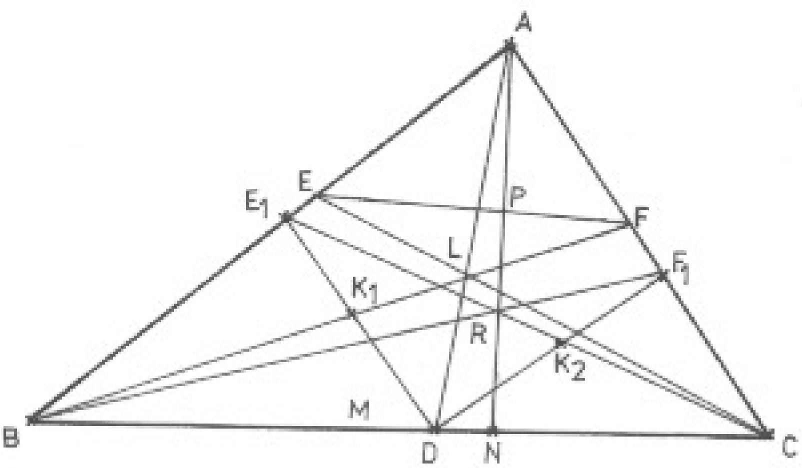
de unde conform teoremei bisectoarei rezultă că

$$\frac{BN}{NC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

relaţie care exprimă faptul că AN este simediana în triunghiul ABC.

TEOREMA 7: *Dacă [AD este bisectoarea unui triunghi oarecare ABC şi dacă K_1 este punctul lui LEMOINE al triunghiului ABD, K_2 punctul lui LEMOINE al triunghiului ADC, $\{L\}=BK_1 \cap CK_2$, $\{E\}=AB \cap CL$, $\{F\}=AC \cap BL$, $\{E_1\}=AB \cap DK_1$, $\{F_1\}=AC \cap DK_2$, $\{R\}=BF_1 \cap CE_1$, $\{P\}=EF \cap AR$ atunci dreapta PL trece prin: mijlocul laturii (BC), mijlocul înălţimii coborâte din A şi prin punctul lui LEMOINE, K al triunghiului ABC.*

Demonstraţie



Fie $\{N\}=BC \cap AP$ şi M mijlocul laturii (BC).
Conform teoremei 6 rezultă că AN este simediană în triunghiul ABC şi deoarecce în virtutea teoremei 5 secanta EF trece prin punctul lui LEMOINE K, rezultă că $P \equiv K$.

Pe de altă parte $L \in (AD)$ conform teroemei 4 şi deoarece AN şi AM sunt ceviene izogonale conform teoremei 3 rezultă că punctele K, L şi M sunt coliniare.

Din teorema lui Schomilch ştim că dreapta MK trece prin mijlocul înălţimii coborâte din A',K,L şi M sunt coliniare, deci dreapta PL trece prin mijlocul înălţimii coborâte din A şi prin punctele K,L şi M.

Sugerăm cititorilor să găsească alte aplicaţii ale rezultatelor din această lucrare!

B I B L I O G R A F I E

1. OPREA, N.: Ceviene de rang k, Gazeta Matematică, 8/1989

2. BANEA, H.: Probleme traduse din rev.sovietică Kvant, E.D.P., București, 1983

3. NICOLESCU, L., BOSKOFF: Probleme practice de geometrie, Ed.Tehnică, 1990

PROPRIÉTÉES DE COLINIARITÉ OBTENUS PAR UNE PROPRIÉTÉ DE ISOGONALITÉ

RESUMÉ. Dans cette ouvrage sont presentées quelques theorèmes originales qui ont le mérite qu'elles offrent une méthode unitaire pour resoudre certaines problèmes difficiles de geométrie élémentaire.

UNIVERSITATEA DIN BAIA MARE
Facultatea de Litere și Științe
str.Victoriei, 76, 4800 BAIA MARE
ROMÂNIA