Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.2(1992-1993), 71-76

ASUPRA UNEI CLASE DE ECUAŢII FUNCŢIONALE ÎN PATRU FUNCŢII NECUNOSCUTE

Dan BĂRBOSU

Scopul acestei lucrări este de a determina funcţiile f, g, h_1, h_2: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ce verifică ecuaţia funcţională:

(1) $$f(x+y)+g(x) = f(h_1(x)+h_2(y)) \ , \quad (\forall)\ x,y\in\mathbb{R} \ .$$

Ideea abordării ecuaţiei funcţionale (1) a fost sugerată de problema 21.028 [3], care cerea determinarea tuturor funcţiilor derivabile f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

(2) $$f(x+y) = x+f(y) \ , \quad (\forall)\ x,y\in\mathbb{R} \ .$$

E clar că luând în (1) $g=-1_{\mathbb{R}}$, $h_1=0$, $h_2=1_{\mathbb{R}}$ se obţine tocmai ecuaţia funcţională (2), deci (1) generalizează (deocamdată ca formă) pe (2). De asemenea, se observă că o soluţie trivială a lui (1) este: f-arbitrară, $g=0$, $h_1=h_2=1_{\mathbb{R}}$.

În cele ce urmează se caută soluţii ale lui (1), diferite de soluţia trivială sus menţionată. Are loc următoarea

TEOREMĂ: *În mulţimea funcţiilor strict monotone de clasă $C^2(\mathbb{R})$ ecuaţia (1) are soluţiile de forma:*

$$f(x) = k\cdot\ln(b+ac^{x})$$

$$g(x) = k\cdot\ln\frac{c_1^{x}}{a_1c^{x}+a_2}$$

$$h_1(x) = -\log_c(ac^{-x}+a_2)$$

$$h_2(x) = \log_c(a_1 c^x + bb_1)$$

unde $k \neq 0$, $c, c_1 > 0$, $a, a_1, a_2, b, b_1 \in \mathbb{R}$ *sunt constante.*

Demonstrație. Derivăm (1) membru cu membru, mai întâi în raport cu x, apoi în raport cu y și avem:

(2) $$f'(x+y) + g'(x) = f'(h_1(x) + h_2(y))h'_1(x) \ , \quad (\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$$

(3) $$f'(x+y) = f'(h_1(x) + h_2(y))h'_2(y) \ , \quad (\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$$

Arătăm că funcțiile f' și h_2 nu se anulează pe R. Să presupunem, prin absurd, că există $y_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $h_2(y_0) = 0$. Folosind (3), deducem că există $y_0 \in \mathbb{R}$ astfel ca $f'(x+y_0) = 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, în contradicție cu monotonia strictă a lui f. Deci $h_2(y) \neq 0$, $(\forall) y \in \mathbb{R}$. Analog se arată că f' nu se anulează pe $\mathbb{R}$. Înseamnă că relațiile (2) și (3) se pot împărți membru cu membru:

(4) $$\frac{1}{f'(x+y)} = \frac{h'_1(x)}{g'(x)} \cdot \frac{1}{h'_2(y)} - \frac{1}{g'(x)} \ , \quad (\forall)\ x, y \in \mathbb{R} \ .$$

Notând:

(5) $$\frac{1}{f'} = F \ , \quad \frac{h'_1}{g'} = G \ , \quad \frac{1}{h'_2} = H \ , \quad \frac{1}{g'} = T$$

ecuația (4) se transformă în forma echivalentă:

(6) $$F(x+y) = G(x) \cdot H(y) - T(x) \ , \quad (\forall)\ x, y \in \mathbb{R} \ .$$

Deoarece $f, g, h_1, h_2 \in C^2(\mathbb{R})$, funcțiile F,G,H,T sunt de clasă $C^1(\mathbb{R})$. Derivăm (6) în raport cu y și obținem:

(7) $$F'(x+y) = G(x)H'(y) \ , \quad (\forall)\ x, y \in \mathbb{R} \ .$$

Se știe (vezi de exemplu (4)) că soluția generală a lui (7) este $F'(x) = a_1 \cdot c_1^x$ unde $c_1 > 0$, $a \in \mathbb{R}$ sunt constante.

De aici, prin integrare, obținem:

$$F(x) = \int a_1 c_1^x dx = \frac{a_1}{\ln c_1} c_1^x + b_1 = a_2 \cdot c_1^x + b_1 \ , \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

unde: $a_2 = \dfrac{a_1}{\ln c_1}$, $b_1 \in \mathbf{R}$.

Conform lui (5), rezultă $f(x) = \displaystyle\int \frac{1}{a_2 c_1^x + b_1} dx$, care, utilizând în prealabil schimbarea de variabilă $u = a_2 \cdot c_1^x + b_1$, conduce în cele din urmă exprimarea lui f sub forma:

$$f(x) = -\frac{1}{b_1 \ln c_1}(1 + \frac{b_1}{a_2} c_1^{-x}) + c_2 \ , \quad (\forall)\ x \in \mathbf{R}\ (c \in \mathbf{R}) \ .$$

Notând: $k = -\dfrac{1}{b_1 \ln c_1}$, $b = e^{\frac{c_2}{k}}$, $a = \dfrac{b b_1}{a_2}$, $c = \dfrac{1}{c_1}$, avem reprezentarea lui f sub forma:

(8) $f(x) = k \ln(b + a \cdot c^{-x})$, $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$.

Folosind expresia (8) a lui f în ecuația (1), aceasta devine:

(9) $k \ln(b + a c^{x+y}) + g(x) = k \ln(b + a c^{h_1(x) + h_2(y)})$, $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$

Notăm: $g_1(x) = e^{\frac{g(x)}{k}}$, $(\forall) x \in \mathbf{R}$ și atunci (9) se transformă în:

(10) $g_1(x) \cdot (b + a \cdot c^{x+y}) = b + a \cdot c^{h_1(x) + h_2(y)}$, $(\forall)\ x, y \in \mathbf{R}$.

În (10) punem x=0 și obținem:

$$c^{h_2(y)} = \frac{g_1(0)}{c^{h_1(0)}} c^y + b \frac{g_1(0) - 1}{a c^{h_1(0)}} \ , \quad (\forall)\ y \in \mathbf{R}$$

sau notând:

$$a_1 = \frac{g_1(0)}{c^{h_1(0)}}\ ,\quad b_1 = \frac{g_1(0)}{ac^{h(0)}}$$

rezultă:

(11) $c^{h_2(y)} = a_1 \cdot c^y + bb_1$.

Din (11) se determină imediat funcția h_2, ca având forma:

(12) $h_2(x) = \log_c(a_1 \cdot c^x + bb_1)$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

Rămân în continuare de determinat funcțiile g_1 și h_1. În scopul determinării lui g_1, punem y=0 în (10) și avem:

(13) $g_1(x)(b+a \cdot c^x) = b+a \cdot c^{h_1(x)+h_2(0)}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

Scădem (13) din (10) și după efectuarea calculelor avem:

(14) $g_1(x) \cdot c^x(c^y-1) = c^{h_1(x)} \cdot \dfrac{g_1(0)\, c^y + bg_1(0) - b - a \cdot c^{h_1(0)+h_2(0)}}{c^{h_1(0)}}$.

Ținem cont de egalitatea:

$$ac^{h_1(0)+h_2(0)} = b(g_1(0)-1) + a \cdot g_1(0)$$

și efectuând simplificările din (14) obținem:

(15) $g_1(x) = ac^{h_1(x)-x}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

Relațiile (13) și (15) conduc la egalitatea:

$$c^{-h_1(x)} = a_1 \cdot c^{-x} + \frac{aa_1}{b} - \frac{a \cdot c^{h_2(0)}}{b}\ ,\ (\forall)\ x \in \mathbb{R}\ ,$$

și de aici imediat la:

(16) $h_1(x) = -\log_c\left(a_1 \cdot c^{-x} + \dfrac{aa_1}{b} - \dfrac{ac^{h_2(0)}}{b}\right)$.

Notăm $a_2 = \frac{aa_1}{b} - \frac{ac^{h_2(0)}}{b}$ şi ţinând cont că $c = \frac{1}{c_1}$;

obţinem exprimarea lui h_1 sub forma:

(17) $h_1(x) = -\log_c(a_1 \cdot c^x + a_2)$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$.

Din (15) şi (17) obţinem: $g(x) = a_1 \frac{c^x}{a_1 c^x + a_2}$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$, de

unde, având în vedere semnificaţia lui g, obţinem:

(18) $g(x) = k \cdot \ln \frac{c_1^x}{a_1 c^x + a_2}$, $(\forall)$ $x \in \mathbf{R}$.

Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

Observaţii.

i) Probabil, clasa funcţiilor în care se caută soluţiile lui (1) poate fi lărgită, în sensul ipotezei cerute funcţiilor necunoscute de a fi clasă $C^2(\mathbf{R})$. Această ipoteză destul de restrictivă a fost impusă de modul de rezolvare a lui (1) adoptat de autor.

ii) O variantă simplificată a lucrării de faţă este [2], în care, în ipotezele teoremei, se rezolvă o ecuaţie funcţională cu două funcţii necunoscute.

BIBLIOGRAFIE

1. BĂRBOSU, Dan: Asupra unor ecuaţii funcţionale, lucrare prezentată la simpozionul "Creativitate în învăţământ", Baia Mare, noiembrie 1988.

2. BĂRBOSU, Dan: O ecuaţie funcţională cu două funcţii necunoscute (trimisă la "Matematikai Lapok").

3. BURDUŞEL, Călin: Problema 21028, G.M.B., nr.2/1987.

4. RIZESCU, Gh., RIZESCU, G.: Teme pentru cercurile de matematică din licee, Ed.did. şi ped., Bucureşti, 1977.

ON A CLASS OF FUNCTIONAL EQUATIONS IN FOUR UNKNOWN FUNCTIONS

ABSTRACT. The object of this work is to solve the functional equation:

$$f(x+y)+g(x) = f(h_1(x)+h_2(y)) \ , \quad (\forall)\ x,y\in\mathbb{R}$$

where $f,g,h_1,h_2\in C^2(\mathbb{R})$ are unknown functions, strict montone on $\mathbb{R}$.

UNIVERSITATEA DIN BAIA MARE
Facultatea de Litere şi Ştiinţe
str.Victoriei, 76, 4800, BAIA MARE
ROMÂNIA