Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.2(1992-1993), 93-99

# APLICAŢII ALE TEOREMELOR DE MEDIE

Ioana GORDUZA

Scopul acestui articol este de a prezenta câteva probleme pentru a căror rezolvare aplicăm teoremele de medie din cadrul calculului diferenţial şi integral.

<u>Problema 1</u>. Fie $f,g,h: [a,b] \to \mathbb{R}$ funcţii continue pe $[a,b]$, derivabile şi nenule pe $(a,b)$ astfel încât $g(a)=h(b)=0$. Demonstraţi că există $c\in(a,b)$ cu proprietatea:

$$\frac{f'(c)}{f(c)} + \frac{g'(c)}{g(c)} + \frac{h'(c)}{h(c)} = 0$$

<u>Demonstraţie</u>: Construim funcţia $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ definită prin $F(x)=f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)$. Această funcţie este continuă pe $[a,b]$, derivabilă şi nenulă pe $(a,b)$, fiind produs de funcţii cu aceste proprietăţi. În plus avem $F(a)=F(b)=0$ deci aplicând teorema lui Rolle obţinem: $\exists c\in(a,b)$ astfel încât $F'(c)=0$.

$$F'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

Împărţim cu $F(x)\neq F(X)\cdot G(X)\cdot H(X)\neq 0$ şi obţinem

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{h'(x)}{h(x)}$$

Pentru $x=c$ avem relaţia din enunţ:

$$\frac{F'(c)}{F(c)} = \frac{f'(c)}{f(c)} + \frac{g'(c)}{g(c)} + \frac{h'(c)}{g(c)} = 0 .$$

<u>Problema 2</u>. fie $f: [a',b] \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

(i) $f$ continuă pe $[a,b]$

(ii) f derivabilă pe $(a,b)$

(iii) $f(x)\neq 0$ pe $(a,b)$.

Demonstrați că există $c\in(a,b)$ cu proprietatea că

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}$$

Demonstrație. Construim funcția $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definită prin $g(x)=(x-a)(x-b)f(x)$. Această funcție este continuă pe $[a,b]$ și derivabilă pe $(a,b)$ și $g(x)\neq 0$ pe $(a,b)$ deoarece este produsul funcțiilor elementare $x-a$ și $x-b$ și a funcției $f(x)$ care îndeplinește aceste condiții. Observăm că $g(a)=g(b)=0$ și aplicând teorema lui Rolle obținem că există $c\in(a,b)$ astfel încât $g'(c)=0$.

$$g'(x) = (x-b)f(x) + (x-a)f(x) + (x-a)(x-b)f'(x) \tag{1}$$

Împărțim (1) cu $g(x)\neq 0$:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Pentru $x=c$ obținem $\dfrac{g'(c)}{g(c)}=0 \Leftrightarrow \dfrac{f'(c)}{f(c)}=\dfrac{1}{a-c}+\dfrac{1}{b-c}$ .

Problema 3. Fie $f\colon[a,b] \to \mathbb{R}$ funcție continuă pe $[a,b]$, de două ori derivabilă pe $[a,b]$ și $f(a)\neq f(b)$. Să se arate că există $c\in(a,b)$ astfel încât să avem relația: $\dfrac{f'(a)-f'(b)}{f(a)-f(b)} = \dfrac{f''(c)}{f'(c)}$ .

Demonstrație: Considerăm funcțiile

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă și derivabilă pe $[a,b]$

$f'\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă și derivabilă pe $[a,b]$

Aplicăm acestor funcții teorema lui Cauchy ($f(a)\neq f(b)$) și obținem: există $c\in(a,b)$ astfel încât

$$\frac{f'(a)-f'(b)}{f(a)-f(b)} = \frac{f''(c)}{f'(c)} .$$

Problema 4: Fie f și g două funcții derivabile pe un interval I astfel încât $f'g-fg''\neq 0$ pe I. Demonstrați că între două rădăcini ale lui f există cel puțin o rădăcină a lui g și reciproc.

Demonstrație: Fie a și b două rădăcini consecutive a lui f $f(a)=f(b)=0$ și fie funcția $h: I \to \mathbb{R}$ definită prin $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$, continuă și derivabilă pe I.

$$h'(x) = \frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{f^2(x)} \neq 0 \ \text{pe}\ I .$$

- presupunem că $h'(x)>0$ pe $[a,b]\subset I$, atunci funcția h este monoton crescătoare pe $[a,b]$

| x | a | | | | | b |
|---|---|---|---|---|---|---|
| h'(x) | + | + | + | + | + | |
| h(x) | $\frac{g(a)}{f(a)}$ | | | | | $\frac{g(b)}{f(b)}$ |

Dacă $g(x)\neq 0$ pe $[a,b]$, de exemplu $g(x)>0$ pe $[a,b]$ atunci avem că funcția h crește pe $[a,b]$ de la $+\infty$ la $+\infty$, ceea ce este absurd, deci funcția g se anulează pe $(a,b)$: $\exists c\in(a,b), g(c)=0$.

- presupunem că $h'(x)<0$ pe $[a,b]\subset I$ și urmăm un raționament analog.

Deci funcția g trebuie să schimbe semnul pe $[a,b]$, și, fiind continuă se anulează într-un punct.

Problema 5: Fie $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă și monotonă. Fie

$$G: [a,b]\to \mathbb{R},\ G(x)=(x-a)\int_x^b f(t)\,dt+(x-b)\int_a^x f(t)\,dt .$$

Să se demonstreze că G păstrează semn constant pe $[a,b]$.

Demonstrație: Funcția G este o funcție continuă pe $[a,b]$, derivabilă pe $[a,b]$, deoarece f continuă implică $\int_x^b f(t)\,dt$ și $\int_a^x f(t)\,dt$ derivabile, și avem $G(a)=G(b)=0$ .

Aplicăm teorema de medie (f continuă) $\exists c\in(a,b)$

$$G'(x) = \int_x^b f(t)\,dt-(x-a)f(x)+\int_a^x (t)\,dt+(x-b)f(x) =$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt+f(x)(b-a) = (b-a)f(c)-(b-a)f(x) = (b-a)[f(c)-f(x)]$$

deci $G'(x) = (b-a)[f(c)-f(x)]$.

- presupunem f monoton crescătoare, rezultând următoarea situaţie pentru G' şi G:

| x | a | | c | | b |
|---|---|---|---|---|---|
| G' | + + + + + | | 0 | - - - - | |
| G | | ↗ | G(c)>0 | ↘ | 0 |
| G | 0 + + + + + + + + 0 | | | | |

adică G păstrează semn constant pe [a,b], luând valoarea 0 extremităţi.

- presupunem f monoton descrescătoare, se lucrează la fel şi se obţine $G(x)\leq 0$ pe [a,b].

<u>Problema 6</u>: Fie $f,g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Să se arate că există $c\in(a,b)$ astfel încât:

$$\int_a^c f(x)\,dx(c-a)g(c) = \int_c^b g(x)\,dx+(b-c)f(c) .$$

<u>Demonstraţie</u>: Soluţia este sugerată de problema precedentă. Se consideră funcţia $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$

$$G(x) = (x-a)\int_b^x g(t)\,dt+(x-b)\int_a^x f(t)\,dt$$

continuă şi derivabilă căci f şi g continue

$$G'(x) = \int_b^x g(t)\,dt+(x-a)g(x)+\int_a^x f(t)\,dt+(x-b)f(x)$$

Suntem în condiţiile de aplicabilitate a teoremei lui Rolle funcţiei G pe [a,b], având $G(a)=G(b)=0$, deci $\exists c\in(a,b)$ astfel încât $G'(c)=0$, adică

$$\int_b^c g(t)\,dt+(c-a)\,g(c)+\int_a^c f(t)\,dt(c-b)\,f(c)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_a^c (t)\,dt(c-a)\,g(c)=\int_c^b g(t)\,dt+(b-c)\,f(c)\ .$$

Problema 7: Fie f: $[a,b] \to \mathbb{R}$ derivabilă şi strict crescătoare şi $b>0$. Să se demonstreze că $\exists c\in(a,b)$ astfel încât

$$\frac{f(b)-f(c)}{f(c)-f(a)}=c\cdot f'(c)\ .$$

Demonstraţie: Construim funcţia ajutătoare F: $[a,b] \to \mathbb{R}$

$$F(x) = f(b)-f(x)-xf'(x)\,[f(x)-f(a)]$$

pentru care avem:

$F(a) = f(b)-f(a) > 0$ (f strict crescătoare)

$F(b) = -bf'(b)\,[f(b)-f(a)]<0$ $(b>0, f'(b)>0,$ f strict crescătoare) aplicăm lema lui Cauchy-Balzano şi avem $\exists c\in(a,b)$ unde

$$F(c) = 0 \Leftrightarrow f(b)-f(c)-cf'(c)\,[f(c)-f(a)] = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(b)-f(c) = c\cdot f'(c)\,[f(c)-f(a)]$$

Împărţim cu $f(c)-f(a)\neq 0$ (f strict crescătoare) şi rezultă

$$\frac{f(b)-f(c)}{f(c)-f(a)} = c\cdot f'(c)\ .$$

Problema 8: Fie f,g: $[a,b] \to \mathbb{R}$ două funcţii derivabile pe $(a,b)$ şi $f(a)=g(a)=0$. Să se arate că există $c\in(a,b)$ astfel încât să avem

$$f'(c)\int_c^b g(t)\,dt = g'(c)\int_c^b f(t)\,dt$$

La problemele de acest tip se încadrează şi următoarele [1]:

1. Fie f: [a,b] → $\mathbb{R}$ o funcţie continuă pe [a,b], derivabilă pe (a,b) şi A(a,f(a)), B(b,f(b)). Să se arate că oricare ar fi punctul M(α,β) de pe dreapta AB, cu α∉[a,b], există cel puţin un punct $x_0$∈(a,b) aşa încât tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $n_0$ să treacă prin M. (E.Popa, Gazeta Matematică, nr.4, 1989).

2. Considerăm o funcţie f: [a,b] → $\mathbb{R}$, a<b, derivabilă de două ori şi cu derivata a doua continuă şi satisfăcând relaţia f(a)=f(b)=0. Notăm

$$M = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)| \quad si \quad g:[a,b]\to\mathbb{R}\ g(x)=\frac{1}{2}(x-a)(b-x)$$

i) Folosind o funcţie auxiliară de forma f-g, cu $\lambda\in\mathbb{R}$ convenabil, să se arate că pentru fiecare x∈[a,b], există $c_x$∈(a,b) astfel încât f(x)=-f"($c_x$)g(x).

ii) Să se arate că dacă există $x_0$∈(a,b) astfel încât |f($x_0$)|= = Mg($x_0$), atunci f=Mg sau f=-Mg (E.Popa)

## B I B L I O G R A F I E

1.BĂTINEŢU,D.M., MAFTEI,I.V., GHIORGHIŢĂ,V., TOMESCU,I., VORNICESCU,F.: Probleme date la Olimpiadele de matematică pentru licee (1950-1990), Ed.Stiinţifică, Bucureşti, 1992

2.BĂTINEŢU,D.M.: Şiruri, Ed.Albatros, Bucureşti, 1979

3.PANAITOPOL,L., OTTESCU,C.: Probleme date la Olimpiadele de matematică 1968-1974, Ed.Didactică şi Ped., Bucureşti, 1976

4.SIREŢCHI,GH.: Calcul diferenţial şi integral, vol.2, Editura Ştiinţifică şi Enciclop., Bucureşti, 1985.

5.ROTARU,P.: Gazeta Matematică, nr.8, 1983

6.TEODORESCU,N., CONSTANTINESCU,A., PÎRŞAN,L.: Probleme din Gazeta Matematică, Ed.Tehnică, Bucureşti, 1984.

**DES APPLICATIONS DES THÉOREMES DE LA MOYÈNNE**

**RÉSUMÉ.** L'article présente quelques types de problemes dont la solution nécessite la construction d'une function a quelle on aplique une des theoremes de Rolle, Lagrange, Cauchy.

UNIVERSITATEA DIN BAIA MARE
Facultatea de Litere şi Ştiinţe
str.Victoriei, 76, 4800 BAIA MARE
ROMÂNIA