Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.2(1992-1993),101-104

GENERALIZAREA UNEI FORMULE A LUI EULER

Gabriella KOVÁCS

Este cunoscută următoarea formulă a lui Euler:

F1. Dacă $s_n \in \mathbf{R}$, $s_n \to s \in \mathbf{R}$ şi $\lambda > 0$, atunci $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k s_k / (1+\lambda)^n \to s$.
Ea rezultă uşor din teorema lui Toeplitz (T3).

Datorită egalităţii $C_n^k = C_n^{n-k}$, are loc formula modificată:

F2. Dacă $s_n \in \mathbf{R}$, $s_n \to s \in \mathbf{R}$ şi $\lambda > 0$, atunci $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k s_{n-k} / (1+\lambda)^n \to s$.

Într-adevăr, punând $\frac{1}{\lambda} = \mu$ găsim

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k s_{n-k} / (1+\lambda)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k} \mu^{n-k} s_{n-k} / (1+\mu)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \mu^k s_k / (1+\mu)^n \xrightarrow{(F_1)} s .$$

În această notă prezentăm o generalizare comună a celor două formule şi câteva consecinţe imediate.

Vom folosi teorema lui Toeplitz:

T3. Fie dat $(t_{n,k})_{n,k \in \mathbf{N}}$, $n \in \mathbf{N}$, $0 \le k \le n$, un tablou triunghiular infinit de numere reale, astfel încât:

(a) $\lim_{n \to \infty} t_{n,k} = 0$ pentru orice k fixat

(b) şirul $\left(\sum_{k=0}^{n} |t_{n,k}|\right)$ este mărginit

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} t_{n,k} = 1$.

Dacă $s_n \in \mathbf{R}$ şi $s_n \to s \in \mathbf{R}$, atunci $\sum_{k=0}^{n} t_{n,k} \cdot s_k \to s$.

F4. Dacă $x_n, y_n \in \mathbf{R}$, $x_n \to x \in \mathbf{R}$, $y_n \to y \in \mathbf{R}$ şi $\lambda > 0$, atunci

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k x_k y_{n-k} \, / \, (1+\lambda)^n \to xy \, .$$

Demonstrație.

Când $y \neq 0$, tabloul $t_{n,k} = \frac{1}{y} C_n^k \lambda^k y_{n-k} \, / \, (1+\lambda)^n$ satisface ipotezele din teorema lui Toeplitz:

(a') Pentru orice k fixat $\lim\limits_{n\to\infty} t_{n,k} = 0$, întrucât

$C_n^k \, / \, (1+\lambda)^n \to 0 \quad (n\to\infty)$, $|y_{n-k}| \le M$ iar $\frac{1}{y}\lambda^k$ este constantă.

(c') $\sum_{k=0}^{n} t_{n,k} \xrightarrow{(F_2)} \frac{1}{y} \cdot y = 1$

(b') Mărginirea şirului $\left(\sum_{k=0}^{n} |t_{n,k}|\right)$ rezultă din (c'), deoarece începând de la un rang n_0, y_n păstrează semnul numărului real nenul $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ şi în consecință $|t_{n,k}| = t_{n,k} \; \forall \, n \ge n_0$.

Aplicând teorema lui Toeplitz găsim

$$\sum_{k=0}^{n} \left[\frac{1}{y} C_n^k \lambda^k y_{n-k} \, / \, (1+\lambda)^n \right] \cdot x_k \to x \, .$$

Prin înmulțire cu y rezultă F4.

Dacă y=0, notând cu M o margine a şirului (x_n): $|x_n| \le M$, $\forall n \in \mathbf{N}$ avem

$$\left|\sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k x_k y_{n-k} \ / \ (1+\lambda)^n\right| \le \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k |x_k||y_{n-k}| \ / \ (1+\lambda)^n \le$$

$$\le M \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k |y_{n-k}| \ / \ (1+\lambda)^n \xrightarrow{(F_2)} 0 \ .$$

Pe baza criteriului de majorare deducem că

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k x_n y_{n-k} \ / \ (1+\lambda)^n \to 0 = xy \ .$$

Aplicații ale formulei F4.

1. Dacă $x_n \in \mathbf{R}$, $x_n \to x \in \mathbf{R}$ și $\lambda > 0$, atunci

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k x_k x_{n-k} \ / \ (1+\lambda)^n \to x^2 \ .$$

2. Dacă $x_n \in \mathbf{R}^*$, $x_n \to x \in \mathbf{R}^*$ și $\lambda > 0$, atunci

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k \frac{x_k}{x_{n-k}} \ / \ (1+\lambda)^n \to 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k \frac{x_{n-k}}{x_k} \ / \ (1+\lambda)^n \to 1 \ .$$

3. Mai general, dacă $x_n \in \mathbf{R}$, $x_n \to x \in \mathbf{R}$, $\lambda > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$, și în caz că $\alpha < 0$ sau $\beta < 0$: $x_n \neq 0 \ \forall \ n \in \mathbf{N}$, $x \neq 0$, atunci

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k x_n^\alpha x_{n-k}^\beta \ / \ (1+\lambda)^n \to x^{\alpha+\beta} \ .$$

4. Pentru orice $\lambda > 0$ și $\alpha > 0$, $\beta > 0$ cu proprietatea că $\alpha + \beta = 1$, valoarea

$$M_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda^k x_n^\alpha \cdot x_{n-k}^\beta \ / \ (1+\lambda)^n$$

este o veritabilă medie a numerelor strict pozitive $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\min_{0 \le k \le n} x_k \le M_{n+1} \le \max_{0 \le k \le n} x_k .$$

În plus, dacă $x_n \to x \in \mathbb{R}$, atunci $M_n \to x$ -- ca la media aritmetică, media geometrică şi media armonică.

Prin alegerea parametrilor λ, α şi β putem încerca să mărim sensibilitatea mediei M_n faţă de variaţii mici ale numerelor x_k.

B I B L I O G R A F I E

1. BALÁZS, M., KOLUMBÁN, J.: Analiză matematică (l.magh.) Editura Dacia, Cluj, 1978, pag. 437-439.

2. BATINEŢU, M.D.: Probleme de matematică pentru treapta a II-a de liceu. Şiruri. Editura Albatros, 1979, pag. 502-506.

3. DUX, E., GODA, L.: Grade diferite de sensibilitate a mediilor (l.magh.), Matematikai lapok, Budapest, 33 (1982-1986), no.1-3.

A GENERALIZATION OF AN EULER'S FORMULA

ABSTRACT. The aim of this note is to give a common generalization (F4) of formulas F1,F2 (due to Euler) and a few consequences.

UNIVERSITATEA DIN BAIA MARE
Facultatea de Litere şi Ştiinţe
str.Victoriei, 76, 4800, BAIA MARE
ROMÂNIA