Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.2(1992-1993),105-113

ASUPRA UNOR INELE GENERALIZATE (I)

Adina-Loredana MELNICIUC

Noţiunea de inel şi aplicaţiile ei sunt bine cunoscute. În lucrare definim şi exemplificăm inele generalizate, obţinute prin înlocuirea operaţiei multiplicative printr-o operaţie ternară.

§ 1. Noţiuni introductive

<u>1.1. Definiţia (2,3)-inelului</u>.

Tripletul $(R,+,\circ)$ este un (2,3)-inel, unde R este o mulţime, "+" operaţie binară (aditivă) şi "$\circ$ o operaţie ternară (multiplicativă) [1] definită pe ea, dacă:

(i) $(R,+)$ este un grup comutativ;

(ii) $(R,\circ)$ este un 3-semigrup;

(iii) este satisfăcută axioma de distributivitate a celei de-a doua operaţii faţă de prima, adică:

$\forall\, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \in R$ au loc relaţiile:

$$(b_1+b_2, a_2, a_3)_\circ = (b_1, a_2, a_3)_\circ + (b_2, a_2, a_3)_\circ$$

$$(a_1, b_1+b_2, a_3)_\circ = (a_1, b_1, a_3)_\circ + (a_1, b_2, a_3)_\circ$$

$$(a_1, a_2, b_1+b_2)_\circ = (a_1, a_2, b_1)_\circ + (a_1, a_2, b_2)_\circ$$

Dacă, în particular operaţia ternară este comutativă (semicomutativă) atunci $(R,+,\circ)$ este un (2,3)-inel comutativ (semicomutativ) [1].

Dacă $(R,\circ)$ are element unitate atunci (2,3)-inelul este cu unitate.

Menţionăm că un (2,3)-inel poate să aibă mai multe unităţi.

Observaţie. Fixând elementul central a_2 în operaţia ternară putem defini operaţia binară $x \cdot y = (x, a_2, y)_\circ$. Se verifică uşor că $(R, +, \circ)$ este un inel obişnuit.

1.2. Definiţia idempotentului multiplicativ.

Un element $a \in R$ se numeşte *idempotent multiplicativ* dacă a este un idempotent în $(R, \circ)$, adică:

$$(a,a,a)_\circ = a$$

Elementul neutru al operaţiei aditive se numeşte de obicei element zero şi se notează cu 0.

1.3. Proprietăţi

1. Dacă $0 \in R$ este *elementul zero* al (2,3)-inelului, atunci avem:

$$(0,a_2,a_3)_\circ = (a_1,0,a_3)_\circ = (a_1,a_2,0)_\circ = 0 \quad \forall\, a_1,a_2,a_3 \in R \ .$$

2. Dacă simetricul unui element a faţă de adunare se notează obişnuit prin -a, atunci:

$\forall\, a_1,a_2,a_3 \in R$ avem

$$-(a_1,a_2,a_3)_\circ = (-a_1,a_2,a_3)_\circ = (a_1,-a_2,a_3)_\circ = (a_1,a_2,-a_3)_\circ \ .$$

Demonstraţie.

1. Folosind distributivitatea operaţiei ternare faţă de cea binară avem:

$(a_1,a_2,a_3)_\circ = (a_1+0,a_2,a_3)_\circ = (a_1,a_2,a_3)_\circ + (0,a_2,a_3)_\circ$ de unde rezultă $(0,a_2,a_3)_\circ = 0$ ş.a.m.d.

2. $0 = (0,a_2,a_3)_\circ = (a_1+(-a_1),a_2,a_3)_\circ = (a_1,a_2,a_3)+(-a_1,a_2,a_3)_\circ$ de unde rezultă $(-a_1,a_2,a_3)_\circ = (a_1,a_2,a_3)_\circ$.

1.4. Definiţia (2,3)-corpului

Inelul $(R,+,\circ)$ de tip (2,3) se numeşte (2,3)-corp dacă $(R \backslash 0, \circ)$ este un grup ternar (3-grup), unde 0 este elementul zero al inelului.

1.5. Divizori ai lui zero

Fie R un (2,3)-inel cu element zero. Un element $a\in R$, se numeşte *1-divizor al lui zero* (2-divizor al lui zero respectiv 3-divizor al lui zero) dacă există $b_1, b_2, b_3 \in R$ nenuli astfel încât:

$$(a,b_2,b_3)_\circ = 0 \quad (\ (b_1,a,b_3)_\circ=0 \ \text{ respectiv } \ (b_1,b_2,a)_\circ = 0 \ )$$

Dacă un element este un i-divizor al lui zero pentru orice $i\in\{1,2,3\}$ atunci el este numit, simplu, *divizor al lui zero*.
Elementul zero este întotdeauna un divizor al lui zero.
Un divizor al lui zero se numeşte divizor propriu-zis dacă este diferit de zero.

§ 2. Exemple de (2,3)-inele

Exemplul 2.1. Pe mulţimea $A=Z\times Z$ definim operaţiile:

$\oplus: A^2\to A$ şi $\circ: A^3\to A$ astfel:

$$(x_1,y_1)\oplus(x_2,y_2) = (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$$

$$\forall\ x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3\in Z$$

$$((x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3))_\circ = (x_1y_2x_3, y_1x_2y_3)$$

Tripletul $(A,\oplus,\circ)$ este un (2,3)-inel semicomutativ cu divizori ai lui zero, având ca element idempotent aditiv elementul zero.

i) Se verifică uşor că $(A,\oplus)$ este grup abelian cu elementul neutru (0,0), iar opusul lui (x,y) este (-x,-y).

ii) Să arătăm în continuare că $(A,\circ)$ este semigrup semicomutativ.

1° $((x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3))_\circ = (x_1y_2x_3, y_1x_2y_3) = (x_3y_2x_1, y_3x_2y_1) =$

$= ((x_3,y_3),(x_2,y_2),(x_1,y_1))_\circ$ deci operaţia "$\circ$" este semicomutativă.

2° $(\forall)\ (x_1y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_4),(x_5,y_5)\in Z\times Z$ avem:

$$(((x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3))_\circ,(x_4,y_4),(x_5,y_5))_\circ =$$

$$= ((x_1y_2x_3, y_1x_2y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5))_\circ =$$

$$= ((x_1y_2x_3)y_4x_5, (y_1x_2y_3)x_4y_5) =$$

$$= (x_1(y_2x_3y_4)x_5, y_1(x_2y_3x_4)y_5) =$$

$$= ((x_1, y_1), (x_2y_3x_4, y_2x_3y_4), (x_5, y_5))_\circ =$$

$$= ((x_1, y_1)), ((x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4))_\circ, (x_5, y_5))_\circ .$$

Analog

$$(((x_1y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))_\circ, (x_4, y_4), (x_5, y_5))_\circ = ((x_1, y_2x_3)y_4x_5, (y, x_2y_3)\,;$$

$$= (x_1y_2(x_3y_4x_5), y_1x_2(y_3x_4y_5)) = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3y_4x_5, y_3x_4y_5))_\circ$$

$$= ((x_1, y_1), (x_2, y_2), ((x_3, y_3), (x_4, y_4, (x_5, y_5)_\circ)_\circ$$

deci operaţia ∘" este asociativă.

Din 1° şi 2° rezultă $(A, \circ)$ este 3-semigrup semicomutativ.

iii) Mai avem de arătat că are loc şi proprietatea de distributivitate a operaţiei ternare faţă de cea binară. Spre exemplu oricare ar fi

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_2', y_2'), (x_3, y_3) \in A$ avem

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2) + (x_2', y_2'), (x_3, y_3))_\circ = ((x_1, y_1), (x_2 + x_2', y_2 + y_2'), (x_3, y_3))_\circ =$$

$$= (x_1(y_2 + y_2')x_3, y_1(x_2 + x_2')y_3) = (x_1y_2x_3, y_1x_2y_3) \oplus (x_1y_2'x_3, y_1x_2'y_3) =$$

$$= ((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))_\circ \oplus ((x_1, y_1), (x_2', y_2'), (x_3, y_3))_\circ .$$

Elementele idempotente multiplicative sunt elementele $(x, y) \in A$ pentru care $((x, y, (x, y), (x, y))_\circ = (x, y)$ adică $\begin{cases} xyx = x \\ yxy = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (xy-1)x = 0 \\ (yx-1)y = 0 \end{cases}$

Deci elementele idempotente sunt $(0,0)$; $(1,1)$; $(-1,-1) \in Z \times Z$. Inelul are trei idempotenţi multiplicativi, dintre care unul este evident elementul zero.

Divizorii lui zero se determină pornind de la definiţie ca fiind o infinitate şi anume perechile $(x,0)$ şi $(0,y)$ unde $x, y \in Z$. Menţionăm că elementele $(1,1)$ şi $(-1,-1)$ sunt unităţi la dreapta şi la stânga dar nu 2-unităţi deoarece deşi

$((x,y),(1,1),(1,1))_\circ = (x,y)$ avem

$((1,1),(x,y),(1,1)) = (y,x) \neq (x,y)$.

Observaţie

Fie elementul $(a,b) \in Z \times Z$. Definind operaţia binară "$\circ$" pe A

$(x,y)\cdot(x',y') = ((x,y),(a,b),(x',y'))_\circ = (xbx',yay')$ tripletul $(A,\oplus,\circ)$ este inel obişnuit.

Dacă $(a,b)=(1,1)$ sau $(a,b)=(-1,-1)$ atunci acest inel este cu unitate (a,b) în caz contrar nu are unitate.

Exemplul 2.2. Pe mulţimea punctelor unei parabole $\wp$ cu vârful V definim următoarele operaţii:

Operaţia binară [2] $\oplus: \wp^2 \to \wp$ $M_1 \oplus M_2 = M$ unde pentru $\forall M_1, M_2 \in \wp \setminus \{V\}$, distincte, M este punctul în care paralela dusă prin V la coarda M_1M_2 retaie parabola (Fig.I.1) iar $M \oplus V = M$ oricare ar fi $M \in \wp$.

În cazul în care $M_1=M_2$, coarda devine tangentă în M_1. (Fig.I.2)

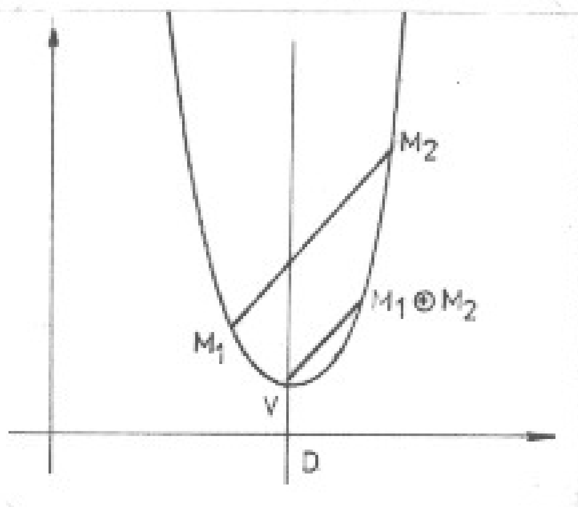

Fig.I.1.

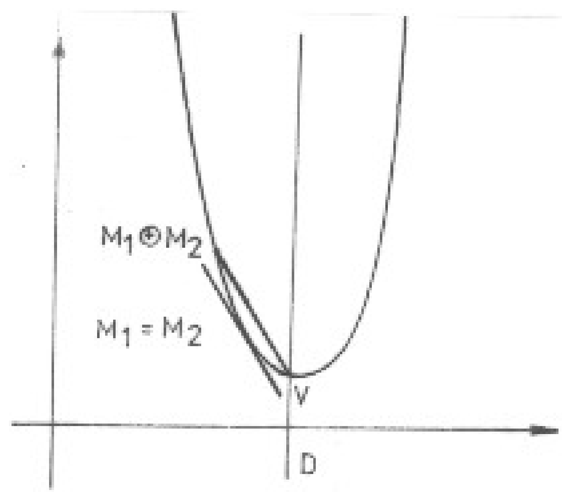

Fig.I.2

Operaţia ternară $\circ: \wp^3 \to \wp$ se defineşte astfel:

Fie (Δ) axa de simetrie a parabolei şi E un punct fixat pe parabolă, diferit de vârf.

Dacă $M_1, M_2, M_3 \in \wp \setminus \{V\}$ distincte, fie M'_0 punctul în care coarda M_1M_2

intersectează axa de simetrie (Δ) a parabolei și M_4 punctul în care EM'_0 taie din nou parabola (dacă întâmplător EM'_0 este tangentă în E la parabolă atunci M_4=E). Dreapta M_3M_4 intersectează pe (Δ) în punctul M''_0. Punctul definit de operația ternară $(M_1,M_2,M_3)_o$ este tocmai punctul în care dreapta EM''_0 taie din nou parabola. (Fig.II.1).

Dacă punctele M_1,M_2,M_3 nu sunt toate distincte, de exemplu dacă $M_1=M_2$ atunci, în descrierea de mai sus, coarda M_1M_2 devine tangenta în M_1 la $\mathcal{P}$. (Fig.II.2)

De asemenea, dacă M_1 sau M_2 coincide cu E, atunci $M_4=M_2$ respectiv M_1.

Dacă M_3 coincide cu M_4 atunci tangenta în M_3 la $\mathcal{P}$ intersectează pe (Δ) în M''_0.

În particular, dacă două puncte coincid cu E atunci produsul ternar coincide cu cel de al treilea punct.

În cazul în care unul din punctele M_i; i=1,2,3 este V atunci, prin definiție $(M_1,M_2,M_3)_o$ = V.

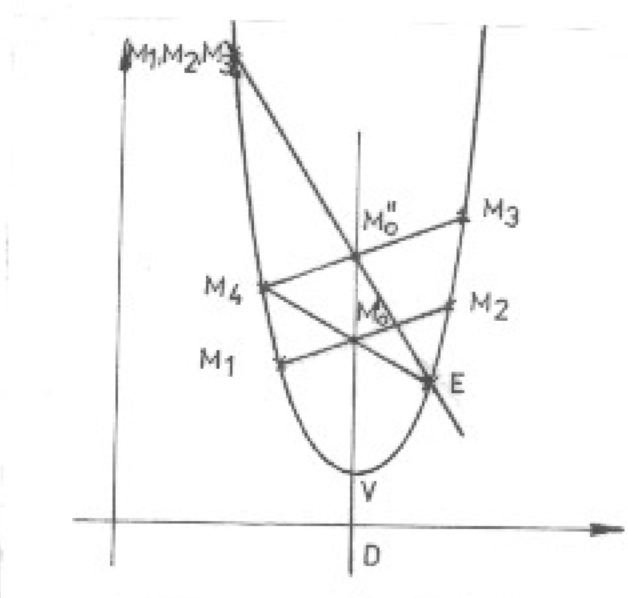

Fig.II.1

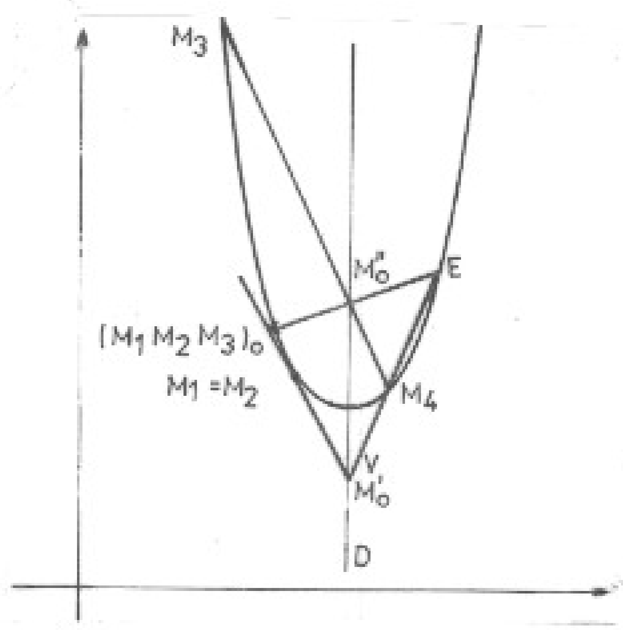

Fig.II.2

<u>Propoziție</u>. *Tripletul $(\wp,\oplus,\circ)$ este un (2,3)-inel cu elementul zero, vârful parabolei și unitatea E, izomorf cu (2,3)-inelul $(\mathbb{R},+,*)$ în care operația binară este adunarea numerelor reale și cea ternară produsul a trei numere reale.*

<u>Demonstrație</u>. Raportând parabola la un reper format din tangenta în vârf la parabolă (Ox), axa de simetrie a parabolei (Δ) (Oy) și originea vârful V și luând ca unitate de măsură distanța de la punctul E format la (Δ), ecuația parabolei față de acest reper este $y=ax^2$, iar punctele V și E au coordonatele $V(0,0)$, $E(1,a)$, parametrul a reprezentând distanța de la E la tangenta în vârf la parabolă.

Fie $M_i(x_i,ax_i^2), i=1,2; x_i\neq 0$ două puncte diferite de vârf ale parabolei. Deoarece coeficientul unghiular al coardei M_1M_2 este $a(x_2+x_1)$ (al tangentei în M_1 la $\wp$ este $2ax_1$, dacă $M_1\equiv M_2$), paralela prin V la M_1M_2, de ecuație $y=a(x_2+x_1)x$, taie conform definiției 2.1, parabola din nou în punctul $M_1\oplus M_2$ de abscisă $x_{M_1\oplus M_2} = x_1+x_2$ adică

$x_{M_1\oplus M_2} = x_{M_1}+x_{M_2}$ (1).

Relația de mai sus se păstrează și dacă $M_1=M_2$ întrucât paralela prin V la tangenta în M_1 la $\wp$ având ecuația $y=2ax_1x$ taie din nou $\wp$ în punctul $M_1\oplus M_2$ de abscisă $x_{M_1\oplus M_1} = 2x_1$.

De asemenea, deoarece $V\oplus M=M=M\oplus V$ pentru orice $M\in\wp$ avem

$x_{V\oplus M} = x_M = 0+x_M = x_V+x_M$.

Fie $M_i(x_i,ax_i^2)\in\wp\setminus\{V\}$, $i=1,2,3$ și punctul M'_0 definit de

$$\{M'_0\}=\begin{cases} M_1M_2\cap(\Delta), & daca\ M_1\neq M_2 \\ tg\, M_1\cap(\Delta), & daca\ M_1=M_2 \end{cases}.$$

Efectuând calculele deducem că axa (Δ) de ecuație $x=0$ intersectează dreapta M_1M_2 în $M'_0(0,-ax_1x_2)$.

Dacă $M_1=M_2$, atunci axa (Δ) intersectează tangenta în M_1 la $\wp$ în

$M'_0(0,-ax_1^2)$.

Dreapta M'_0E taie din nou parabolă $\wp$ în M_4 de abscisă $x_4=x_1\cdot x_2$ (respectiv $x_4=x_1^2$ dacă $M_1=M_2$) adică $x_{M_4}=x_{M_1}\cdot x_{M_2}$.

Analog se determină coordonatele lui $M_0''(0,-ax_3x_4)$ și intersectând $M_0''E$ din nou cu $\wp$ se obține abscisa punctului $(M_1,M_2,M_3)_*$ ca fiind $x_3x_4=$ $=x_3(x_1x_2)$.

$$x_{(M_1,M_2,M_3)_*} = x_1\cdot x_2\cdot x_3 = x_{M_1}\cdot x_{M_2}\cdot x_{M_3} \tag{2}$$

Deoarece $(M,E,E)_* = M = (E,M,E)_* = (E,E,M)_*$ și $x_E=1$ relația (2) se verifică și pentru cazul în care două puncte coincid cu E.
De asemenea, dacă unul din puncte coincide cu V, întrucât $x_V=0$, avem $x_{(M_1,M_2,V)_*} = x_V = 0 = x_{M_1}\cdot x_{M_2}\cdot x_V$.

Fie $f: \wp \to \mathbb{R}$, $f(M)=x_M$ aplicația care face ca fiecărui punct să-i corespundă abscisa sa. Evident, ea este bijectivă.

Relațiile (1) și (2) ne demonstrează că:

$$f(M_1 \oplus M_2) = f(M_1)+f(M_2)$$

$$\forall\, M_1, M_2, M_3 \in \wp$$

$$f((M_1,M_2,M_3)_*) = f(M_1)\cdot f(M_2)\cdot f(M_3)$$

Deoarece $(\mathbb{R},+,*)$ este un (2,3)-inel cu elementul zero (0) și unitate (1) rezultă că și $(\wp,\oplus,\circ)$ este un (2,3) inel cu elementul zero, vârful parabolei $x_V=0$ și elementul unitate E, $x_E=1$.

<u>Observație</u>: Operația ternară definită în acest exemplu reprezintă extinderea la 3 elemente a operației binare "produs" definită în lucrarea [2].

B I B L I O G R A F I E

1.CROMBEZ,G.: On (n,m)-rings, Abh.Math. Sem.Univ. Hamburg, 37, 1972, pg.180-199

2.POP,S.M.; Structuri algebrice definite pe punctele unei parabole, G.M. seria B, nr.8, 1985, pg.273-274.

ON SOME GENERALIZED RINGS (I)

ABSTRACT. This paper is concerned with (2,3)-rings ilustrated by our examples.

UNIVERSITATEA DIN BAIA MARE
Facultatea de Litere și Științe
str.Victoriei, 76, 4800 BAIA MARE
ROMÂNIA