Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.2(1992-1993),115-130

DEDUCEREA UNOR IDENTITĂŢI ALGEBRICE ŞI TRIGONOMETRICE CU AJUTORUL DERIVATEI ŞI INTEGRALEI

Monica VARIU

Lucrarea de faţă îşi propune ilusrarea modului în care pot fi deduse unele identităţi şi inegalităţi algebrice şi trigonometrice cu ajutorul derivatei şi a integralei. La baza acestor demonstraţii stă următoarea propoziţie:

PROPOZIŢIE

Fie $f,g: I\subset\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a) Dacă f,g *sunt derivabile pe acelaşi interval* I *iar* $f=g$ *pe* I *atunci* $f'=g'$ *pe* I.

b) Dacă f,g *sunt integrabile pe un interval* $I=[\alpha,\beta]$ *şi* $f=g$ *pe* $[\alpha,\beta]$ *atunci*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$$

Prezentăm în continuare unele inegalităţi şi identităţi rezolvabile prin metode a căror demonstraţie se rezumă la aflarea funcţiilor potrivite astfel încât propoziţia să poată fi aplicată. Partea care pare a fi cea mai dificilă este aflarea funcţiilor însă prin intuiţie, privind membrul stâng al expresiilor matematice, funcţiile pot fi găsite cu uşurinţă.

1. Să se demonstreze că dacă $x\neq 1$ atunci

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}\ ,\quad n\in\mathrm{N}$$

Soluţie

Să considerăm cele două funcţii astfel:

$$f(x) = 1+x+x^2+\ldots+x^n$$

şi

$$g(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

Cele două funcţii sunt egale pentru $x\neq1$, derivatele lor sunt de asemenea egale şi deci prin derivarea lor avem:

$$f'(x) = 1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$$

$$g'(x) = \frac{-nx^{n+1}+1+(n+1)(x-1)x^n}{(x-1)^2}$$

Cum $f'(x)=g'(x) \Rightarrow 1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$

Observaţie

Dacă $x\in Z \Rightarrow 1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}\in Z$ deci prin urmare şi membrul drept al egalităţii $\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}\in Z$ ceea ce înseamnă că

$(x-1)^2|nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$.

Ca un caz particular al acestei divizibilităţi a fost formulată o problemă dată la Olimpiada de matematică, cu următorul enunţ:

Să se determine numărul care divide pe

$$1966\cdot1968^{1967} - 1967\cdot1968^{1968}+1$$

Problema se rezolvă uşor dacă ţinem seama de faptul că n=1966 şi x=1968. Deci prin urmare numărul căutat este 1967^2 deoarece

$$1966\cdot 1968^{1967} - 1967\cdot 1968^{1966}+1 \vdots 1967^2$$

Majoritatea identităţilor, ce au la bază prima parte a propoziţiei, sunt identităţi combinatorice.

2. Integrând în două moduri funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=(1+x)^n$, pe intervalul [0,1] să se demonstreze că avem

$$\frac{C_n^0}{1}+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}, \quad n\in\mathbb{N}^*$$

Soluţie

Se obţine prin integrare că

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \left.\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Dar

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n)\,dx =$$

$$= C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n .$$

Deci

$$C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\ldots+\frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} .$$

Exemplul poate fi generalizat şi integrând aceeaşi funcţie vom obţien următoarea identitate

$$\alpha C_n^0+\frac{\alpha^2}{2}C_n^1+\frac{\alpha^3}{3}C_n^2+\ldots+\frac{\alpha^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{(1+\alpha)^{n+1}-1}{n+1}, \quad \alpha\in\mathbb{R} .$$

Soluţie

Integrala va fi definită acum pe intervalul $[0,\alpha]$.

$$\int_0^\alpha (1+x)^n dx = \left.\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right|_0^\alpha = \frac{(\alpha+1)^{n+1}-1}{n+1}$$

Altfel

$$\int_0^{\alpha}(1+x)^n dx = \int_0^{\alpha}(C_n^0+C_n^1x+\ldots+C_n^nx^n)\,dx =$$

$$= \left[xC_n^0+\frac{x^2}{2}C_n^1+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n+1}C_n^n\right]\Big|_0^{\alpha} =$$

$$= \alpha C_n^0+\frac{\alpha^2}{2}C_n^1+\ldots+\frac{\alpha^{n+1}}{n+1}C_n^n$$

Deci

$$\alpha C_n^0+\frac{\alpha^2}{2}C_n^1+\ldots+\frac{\alpha^{n+1}}{n+1}C_n^n = \frac{(\alpha+1)^{n+1}-1}{n+1} .$$

Cazul particular prezentat anterior se obţine pentru $\alpha=1$.

3. Calculând în două moduri $\int_0^1(1-x^2)^n\,dx$, $n\geq 1$, să se stabilească egalitatea

$$C_n^0-\frac{C_n^1}{3}+\frac{C_n^2}{5}-\frac{C_n^3}{7}+\ldots\frac{(-1)^n}{2n+1}C_n^n = \frac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)} .$$

<u>Soluţie</u>

Se dezvoltă după binomul lui Newton

$(1-x^2)^n = C_n^0-C_n^1x^2+C_n^2x^4+\ldots+(-1)^nC_n^nx^{2n}$ şi se integrează pe $[0,1]$ această egalitate obţinând membrul stâng din egalitatea dată spre demonstrat:

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx = \left[xC_n^0-\frac{x^3}{3}C_n^1+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}C_n^n\right]\Big|_0^1 =$$

$$= C_n^0-\frac{1}{3}C_n^1+\frac{1}{5}C_n^2+\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}C_n^n .$$

Punând acum $x=\sin t$, integrala dată se mai scrie

$I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}t\cdot dt = 2nI_{2n-1}-2nI_{2n+1}$ obţinând astfel relaţia de recurență $I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n}$. Calculând din aproape în aproape se obține membrul drept al egalității din concluzie

$$C_n^0 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{C_n^n}{2n+1} = \frac{2\cdot4\cdot6\ldots(2n)}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n+1)} .$$

4. Utilizând integrala $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \sin^{2n}(\frac{x}{2}) \sin x \, dx$ să se stabilească identitatea

$$\frac{2^n}{1} C_n^0 - \frac{2^{n-1}}{2} C_n^1 + \frac{2^{n-3}}{3} C_n^2 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1} C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1} .$$

Soluție

Notăm prin I_n integrala dată și avem

$$I_n = \frac{1}{2} n \int_{\pi/3}^{\pi/2} (1-\cos x)^n \sin x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2^n} \int_{\pi/3}^{\pi/2} (-1 - C_n^1 \cos x + C_n^2 \cos^2 x + \ldots + (-1)^n C_n^n \cos^n x) \sin x \cdot dx =$$

$$= \frac{1}{2^n} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n} \frac{C_n^1}{2} + \frac{1}{2^3} \frac{C_n^2}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}} \frac{C_n^n}{n+1} \right. \qquad (1)$$

Făcând schimbarea de variabilă $t=1-\cos x$ se obține

$$I_n = \frac{1}{2^n} \int_{1/2}^{1} t^n dt = \frac{1}{2^n} \frac{2^{n+1}-1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \qquad (2)$$

Din (1) și (2) se obține relația cerută.

5. Să se demonstreze următoarele identități:

a) $1C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$, $n \geq 2$.

Alegând funcția $f(x)=(1+x)^n$ și derivând-o obținem

$[(1+x)^n]' = n(1+x)^{n-1}$. .

Dezvoltând după binomul lui Newton și apoi derivând avem

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + \ldots + C_n^n x^n$$

$$[(1+x)^n]' = C_n^1+2C_n^2x+\ldots+nC_n^nx^{n-1} .$$

Se observă că pentru x=1 obținem identitatea din enunț.

Deci $n\cdot 2^{n-1} = 1C_n^1+2C_n^2+\ldots+nC_n^n$.

b) $1C_n^1-2C_n^2+\ldots+(-1)^n\cdot nC_n^n = 0 ,\quad n\geq 2$.

Deoarece semnele alternează, funcția aleasă va fi

$$f(x) = (1-x)^n$$

La fel ca exemplul precedent derivând după ambele posibilități obținem

$$[(1-x)^n]' = -n(1-x)^{n-1}$$

$$[(1-x)^n]' = C_n^1-2C_n^2x+\ldots+(-1)^n\cdot nC_n^nx^{n-1}$$

Pentru același caz x=1 obținem

$$1C_n^1-2C_n^2+\ldots+(-1)^n\cdot nC_n^n = 0 .$$

c) $1C_n^1+3C_n^3+5C_n^5+\ldots+\ldots = n2^{n-2} ,\quad n\geq 2$.

Din exemplele a) și b) observăm că adunându-le și făcând simplificările necesare obținem exemplul dat.

$$1C_n^1+2C_n^2+\ldots+nC_n^n = n2^{n-1}$$

$$1C_n^1-2C_n^2+\ldots(-1)^n\cdot nC_n^n = 0$$

$$2C_n^1+2\cdot 3C_n^3+\ldots = n\cdot 2^{n-1}\ |:2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_n^1+3C_n^3+5C_n^5+\ldots = n\cdot 2^{n-2}$$

d) $1^2C_n^1+2^2C_n^2+\ldots+n^2C_n^n = n(n+1)2^{n-2} ,\quad n\geq 2$.

Rezolvarea se bazează pe alegerea lui $f(x)=(1+x)^n$ însă făcându-se anumite artificii matematice pentru obținerea coeficienților combinărilor avem:

$$[(1+x)^n]' = n(1+x)^{n-1}$$

$$n(1+x)^{n-1} = 1\cdot C_n^1+2C_n^2x+\ldots+nC_n^nx^{n-1}\Big|\cdot x$$

Întreaga relaţie se înmulţeşte cu x ca apoi prin derivare să obţinem pătratele dorite.

$$nx(1+x)^{n-1} = 1C_n^1x+2C_n^2x^2+\ldots+nC_n^nx^n$$

$$[nx(1+x)^{n-1}]' = n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}$$

$$n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2} = 1^2C_n^1+2^2C_n^2x+\ldots+n^2C_n^nx^{n-1}$$

Impunem condiţia x=1 şi avem:

$$n2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2} = 1^2C_n^1+2^2C_n^2+\ldots+n^2C_n^n$$

$$n(n+1)2^{n-2} = 1^2C_n^1+2^2C_n^2+\ldots+n^2C_n^n$$

e) $1\cdot 2\cdot C_n^1+2\cdot 3C_n^2+\ldots+n(n+1)C_n^n = n(n+3)2^{n-2}$, $n\geq 2$.

Aceeaşi funcţie $f(x)=(1+x)^n$ însă după derivare egalitatea obţinută se va înmulţi cu x^2 ca la o nouă derivare să obţinem produsele de n(n+1)

$$n(1+x)^{n-1} = 1C_n^1+2C_n^2x+\ldots+nC_n^nx^{n-1}\Big|\cdot x^2$$

$$nx^2(1+x)^{n-1} = 1C_n^1x^2+2C_n^2x^3+\ldots+nC_n^nx^{n+1}$$

Derivăm această relaţie

$$2nx(1+x)^{n-1}+n(n-1)x^2(1+x)^{n-2} = 1\cdot 2C_n^1x+2\cdot 3C_n^2x^2+\ldots+n(n+1)C_n^nx^n$$

Pentru x=1 avem

$$2n2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2} = 1\cdot 2C_n^1+2\cdot 3C_n^2+\ldots+n(n+1)C_n^n$$

$$n(n+3)2^{n-2} = 1\cdot 2C_n^1+2\cdot 3C_n^2+\ldots+n(n+1)C_n^n$$

f) $\frac{1}{m+1}C_n^0-\frac{1}{m+2}C_n^1+\frac{1}{m+3}C_n^2-\ldots+\frac{(-1)^n}{m+n+1}C_n^n = \frac{1}{m+n+1}C_{m+n}^n$, $m,n\in$ℕ

Fie integrala $I_{m,n} = \int_a^b (x-a)^m(b-x)^n dx$. Facem substituţia x-a=t.

$I_{m,n} = \int_a^{b-a} t^m(b-a-t)^n dt$. Notăm b-a=α.

$$I_{m,n} = \int_0^\alpha t^m(\alpha-t)^n dt = \int_0^\alpha t^m[C_n^0\alpha-C_n^1\alpha^{n-1}t+C_n^2\alpha^{n-2}t^2+\ldots+(-1)^nC_n^nt^n]\,dt =$$

$$= \frac{1}{m+1}t^{m+1}C_n^0\alpha\Big|_0^\alpha-\frac{1}{m+2}C_n^1\alpha^{n-1}t^{m+2}\Big|_0^\alpha+\ldots+\frac{(-1)^n}{m+n+1}C_n^nt^{m+n+1}\Big|_0^\alpha =$$

$$= \alpha^{m+n+1}\left[\frac{1}{m+1}C_n^0-\frac{1}{m+2}C_n^1+\frac{1}{m+3}C_n^2+\ldots+(-1)^n\frac{C_n^n}{m+n+1}\right]. \qquad (1)$$

Rezolvând integrala prin părţi obţinem pentru

$u = (x-a)^m$ $\qquad dv = (b-x)^n dx$

$du = m(x-a)^{m-1}$ $\qquad v = \frac{1}{n+1}(b-x)^{n+1}$

$$I_{m,n} = -\frac{1}{n+1}(x-a)^m(b-x)^{n+1}\Big|_a^b+\frac{m}{m+1}\int_a^b (x-a)^{m-1}(b-x)^{n+1}dx =$$

$$= \frac{m}{n+1}I_{m-1,n+1}$$

Deci $I_{m,n} = \frac{m}{n+1}\ I_{m-1,n+1}$

$I_{m-1,n+1} = \frac{m-1}{n+2}\ I_{m-2,n+2}$

....

$$I_{1,m+n+1} = \frac{1}{m+n} I_{0,m+n} .$$

Înmulţind ultimele relaţii obţinem:

$$I_{m,n} = \frac{m!n!}{(m+n)!} I_{0,n+m} = -\frac{m!n!}{(m+n)!}\cdot\frac{1}{m+n+1}(b-x)^{m+n+1}\Big|_a^b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{m,n} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(b-a)^{m+n+1} = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}\alpha^{m+n+1} = \frac{1}{m+n+1}C^n_{m+n}\alpha^{m+n+1} \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă

$$\alpha^{m+n+1}\left[\frac{1}{m+1}C^0_n - \frac{1}{m+2}C^1_n + \frac{1}{m+3}C^2_n - \dots + (-1)^n\frac{C^n_n}{m+n+1}\right] = \frac{1}{m+n+1}C^n_{m+n}\alpha^{m+n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m+1}C^0_n - \frac{1}{m+2}C^1_n + \frac{1}{m+3}C^2_n - \dots + (-1)^n\frac{C^n_n}{m+n+1} = \frac{1}{m+n+1}C^n_{m+n}$$

g) $\quad C^1_n - \frac{1}{2}C^2_n + \dots + (-1)^{n+1}\frac{C^n_n}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

Pornim de la calcularea integralei $\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}dx$ în două moduri: o dată dezvoltând după binomul lui Newton, apoi prin substituţie.

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}dx = \int_0^1 \frac{C^1_n x - C^2_n x^2 + \dots + (-1)^{k+1}C^k_n x^k + \dots + C^n_n x^n}{x}dx =$$

$$= \int_0^1 [C^1_n - C^2_n x + \dots + (-1)^{n+1}C^n_n x^{n-1}]\,dx = xC^1_n\Big|_0^1 - \frac{x^2}{2}C^2_n\Big|_0^1 + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}C^n_n\Big|_0^1 =$$

$$= C^1_n - \frac{1}{2}C^2_n + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}C^n_n \qquad (1)$$

Alegem substituţia 1-x=t rezultă dx=-dt.

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}dx = \int_1^0 -\frac{1-t^n}{1-t}dt = \int_0^1 \frac{(1-t)(1+t+t^2+\ldots+t^{n-1})}{1-t}dt =$$

$$= t\Big|_0^1 + \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 + \ldots + \frac{t^n}{n}\Big|_0^1 = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\ . \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă

$$C_n^1 - \frac{1}{2}C_n^2 + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}C_n^n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\ .$$

h) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\alpha^{k+1}}{k+1}C_n^k = \frac{1-(1-\alpha)^{n+1}}{n+1}\ ,\quad \alpha\in\mathbb{R}$

Funcţia va fi astfel aleasă încât integrată în două moduri să obţinem o dată termenul stâng al egalităţii apoi pe cel drept. Integrala corespunzătoare va fi $\int_0^\alpha (1-x)^n dx$ deoarece după dezvoltarea după binomul lui Newton se obţine sumă de combinări adică termenul stâng. Prin altă metodă vom încerca găsirea termenului drept al identităţii.

$$\int_0^\alpha (1-x)^n dx = \int_0^\alpha [C_n^0 - C_n^1 x + \ldots + (-1)^n C_n^n x^n]\,dx =$$

$$= xC_n^0\Big|_0^\alpha - \frac{x^2}{2}C_n^1\Big|_0^\alpha + \ldots + (-1)^n C_n^n \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^\alpha =$$

$$= \alpha C_n^0 - \frac{\alpha^2}{2}C_n^1 + \ldots + (-1)\frac{\alpha^{n+1}}{n+1}C_n^n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\alpha^{k+1}}{k+1}C_n^k \qquad (1)$$

Altfel

$$\int_0^\alpha (1-x)^n dx = \frac{(-1)(1-x)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^\alpha = \frac{1-(1-\alpha)^{n+1}}{n+1}$$

Din (1) şi (2) rezultă identitatea din enunţ

(6) Fie polinomul $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ şi

$$Q(x) = x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

cu proprietatea că $[P(x)]^2 = (x^2-1)[Q(x)]^2+1$.

Să se demonstreze că: $P'(x) = n\cdot Q(x)$

Soluţie

(1) $[P(x)]^2 = (x^2-1)[Q(x)]^2+1$ gradul polinomului P este 2n, a lui Q(x) este 2m dar din relaţia (1) rezultă 2n=2m+2, rezultă m=n-1.

Prin derivarea relaţiei (1) obţinem:

$$2P(x)\cdot P'(x) = 2x[Q(x)]^2+(x^2-1)Q'(x)\cdot Q(x)\cdot 2$$

$$P(x)\cdot P'(x) = x[Q(x)]^2+(x^2-1)Q'(x)Q(x) \qquad (2)$$

Ridicăm relaţia (2) la pătrat şi avem:

$$[P(x)]^2[P'(x)]^2 = [xQ(x)]^2[Q(x)+(x^2-1)Q'(x)]^2 \qquad (3)$$

Din înmulţirea condiţiei date cu $[P'(x)]^2$ obţinem membrul drept al egalităţii (3)

$$[P(x)]^2[P'(x)]^2 = (x^2-1)[Q(x)]^2[P'(x)]^2+[P'(x)]^2 \qquad (4)$$

Din (3) şi (4) rezultă

$$[Q(x)]^2[xQ(x)+(x^2-1)Q'(x)]^2 = (x^2-1)[Q(x)]^2[P'(x)]^2+[P'(x)]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [P'(x)]^2 = [Q(x)]^2[xQ(x)+Q'(x)(x^2-1)]^2-(x^2-1)[Q(x)]^2[P'(x)]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [P'(x)]^2 = [Q(x)]^2\{[xQ(x)+(x^2-1)Q'(x)]^2-(x^2-1)[P'(x)]^2\} \Rightarrow [Q(x)]^2$$

este divizor al lui $[P'(x)]^2$ dar $[Q(x)]^2$ şi $[P'(x)]^2$ au acelaşi grad: 2n-2.

Coeficientul dominant a lui $[Q(x)]^2$ este 1 iar al lui $[P'(x)]^2$ este n^2, rezultă $[P'(x)]^2 = n^2[Q(x)]^2 \Rightarrow P'(x) = \pm nQ(x)$ sau comparând coeficienţii dominanţi ai lui P'(x) respectiv Q(x), rezultă

$$P'(x) = nQ(x) .$$

7. Să se calculeze sumele

a) $\sin x + 2\sin 2x + \ldots + n\sin nx$

(Manual. Trigonometrie clasa a IX-a)

Folosind identitățile

$$(1) \quad \sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{nT'}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} = F(x)$$

și

$$(2) \quad \cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{ne'}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} = G(x)$$

Derivând membrul drept al identității (2), rezultă

$$\sin x-2\sin 2x-\ldots-n\sin nx = G'(x)$$

$$\sin x+2\sin 2x+\ldots+n\sin x = -G'(x)$$

b) $\cos x+2\cos 2x+\ldots+n\cos nx$

Derivăm membrul drept al relației (1) ăi obținem

$$\cos x=2\cos 2x+\ldots+n\cos nx = F'(x) .$$

8. Să se calculeze

$$\int \cos^{2n+1}x \cdot \sin^{2n+1}x \, dx$$

Soluție

Integrala dată se poate calcula folosind puterile naturale ale funcțiilor sinus și cosinus exprimate polinomial în funcții de multiplul argumentului.

Astfel:

$$\cos^{2n}x = \frac{1}{2^{2n}}\left[C_{2n}^{n}+2\sum_{j=0}^{n} C_{2n}^{j}\cos(2n-2j)x\right] \qquad (1)$$

$$\cos^{2n+1}x = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{j=1}^{n} C_{2n+1}^{j}\cos(2n-2j+1)x \qquad (2)$$

$$\sin^{2n}x = \frac{1}{2^{2n}}\left[C_{2n}^{n}+2\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j}C_{2n}^{j}\cos(2n-2j)x\right] \qquad (3)$$

$$\sin^{2n+1}x = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+j}C_{2n+1}^{j}\sin(2n-2j+1)x \qquad (4)$$

Trecând la primitive rezultă imediat:

$$\int\cos^{2n}xdx = \frac{1}{2^{2n}}\left[xC_{2n}^{n}+2\sum_{j=0}^{n} C_{2n}^{j}\frac{\sin(2n-2j)x}{2n-2j}\right]+c \qquad (1')$$

$$\int\cos^{2n+1}xdx = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{j=0}^{n} C_{2n+1}^{j}\frac{\sin(2n-2j+1)}{2n-2j+1}+c \qquad (2')$$

$$\int\sin^{2n}xdx = \frac{1}{2^{2n}}\left[xC_{2n}^{n}+2\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j}C_{2n}^{j}\frac{\sin(2n-2j)x}{2n-2j}\right]+c \qquad (3')$$

$$\int\sin^{2n+1}xdx = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+j-1}C_{2n+1}^{j}\frac{\cos(2n-2j+1)}{2n-2j+1} \qquad (4')$$

În relaţia (2') făcând substituţia v=sinx obţinem

$$\int\cos^{2n+1}xdx = \int\cos^{2n}x\cos xdx = \int(1-\sin^{2}x)^{n}\cos xdx = \int(1-v^{2})dv =$$

$$= \int\sum_{j=0}^{n} (-1)^{j}v^{2j}C_{2n}^{j}dv = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j}\frac{v^{2j+1}}{2j+1}C_{2n}^{j}+c =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j}C_{2n}^{j}\frac{(\sin x)^{2j+1}}{2j+1}+c\ . \qquad (2.1)$$

Observaţie

Privind integralele (2') şi (2.1) ca fiind definite pe [0,a] obţinem identitatea

$$\frac{1}{2^{2n}}\sum_{j=0}^{n} C_{2n+1}^{j}\frac{\sin(2n-2j+1)a}{2n-2j+1} = \sum_{j=0}^{n} C_{2n}^{j}\frac{(\sin a)^{2j+1}}{2j+1}$$

Integrând relaţia (4) prin părţi obţinem:

$$\int \sin^{2n+1}x dx = \int \sin^{2n}x \sin x dx = \int (1-\cos^2 x)^n \sin x dx =$$

$$= \int (1-C_n^1\cos^2 x + C_n^2\cos^4 x + \ldots)\sin x dx = \int \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j \cos^{2j}x \, d(\cos x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+1} C_n^j \frac{(\cos x)^{2j+1}}{2j+1}$$

Considerând integralele (4') şi (4.1) ca fiind definite pe [0,a] obţinem

$$\int \cos^{2n+1}x dx = \int \cos^{2n}x \cos x dx = \int (1-\sin^2 x)^n \cos x dx = \int (1-v^2)^n dv =$$

$$= \int \sum_{j=0}^{n} (-1)^j v^{2j} C_{2n}^j dv = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{v^{2j+1}}{2j+1} C_{2n}^j + C = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_{2n}^j \frac{(\sin x)^{2j+1}}{2j+1} + C \,. \tag{2.1}$$

Observaţie

Privind integralele (2') şi (2.1) ca fiind definite pe [0,a] obţinem identitatea

$$2^{\frac{1}{2n}}\sum_{j=0}^{n} C_{2n+1}^{j}\frac{\sin(2n-2j+1)a}{2n-2j+1} = \sum_{j=0}^{n} C_{2n}^{j}\frac{(\sin a)^{2j+1}}{2j+1}$$

Integrând relaţia (4) prin părţi obţinem

$$\int \sin^{2n+1}x dx = \int \sin^{2n}x \sin x dx = \int (1-\cos^2 x)^n \sin x dx =$$

$$\int (1-C_n^1\cos^2 x + C_n^2\cos^4 x + \ldots)\sin x dx = \int \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j \cos^{2j}x \, d(\cos x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j+1} C_n^j \frac{(\cos x)^{2j+1}}{2j+1}$$

Considerând integralele (4') şi (4.1) ca fiind definite pe [0,a] obţinem

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j+1}C_{2n+1}^{j}\frac{\cos(2n-2j+1)a}{2n-2j+1}=4^{n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+1}C_{n}^{j}\frac{(\cos a)^{2j+1}}{2j+1}$$

iar pentru intervalul [0,π] obţinem identitatea

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n+j+1}}{2n-2j+1}C_{2n+1}^{j}=4^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{j+1}}{2j+1}C_{n}^{j}$$

Deci

$$\int\cos^{2n+1}x\,\sin^{2n+1}x\,dx=\int\cos x\,\sin x)^{2n+1}dx=\frac{1}{2^{2n+1}}\int(\sin 2x)^{2n+1}dx=$$

$$=\frac{1}{2^{2n+1}}\cdot\frac{1}{2^{2n}}\int\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}C_{2n+1}^{j}\sin(2n-2j+1)2x\,dx=$$

$$\frac{1}{2^{4n+1}}\left[\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j+1}C_{2n+1}^{j}\frac{\cos 2(2n-2j+1)}{2C2n-2j+1}\right]+C_1 \qquad (5.1)$$

Integrala dată se mai poate calcula şi prin schimbări de variabilă

$$\int\sin^{2n+1}x\,\cos^{2n+1}x\,dx=\int\sin^{2n+1}x\cos^{2n}\cos x\,dx=\int\sin^{2n+1}x(1-\sin^{2}x)^{n}\cos x\,dx$$

Notând sinx=v, diferenţiind şi înlocuind mai sus, rezultă

$$\int v^{2n+1}(1-v^{2})^{n}dv=\int v^{2n+1}\left[C_{n}^{0}-C_{n}^{1}v^{2}+\ldots+(-1)^{n}C_{n}^{n}v^{2n}\right]dv=$$

$$=\int v^{2n+1}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_{n}^{j}v^{2j}dv=\int\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_{n}^{j}v^{2n+2j-1}dv=$$

$$=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_{n}^{j}\frac{v^{2n}+2j+1}{2(n+j+1)}+C_2=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_{n}^{j}\frac{(\sin x)^{2n+2j+1}}{2(n+j+1)}+C_2 \qquad (5.2)$$

Din (5.1) şi (5.2) rezultă F(x) - F(x) =k unde F(x), F(x) sunt primitivele din formulele (5.1) respectiv (5.2)
Considerând F(x) primitivă pe [0,π/2] obţinem identitatea

$$\frac{1}{4^{2n+1}}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}\frac{C_{2n+1}^{j}}{2n-2j+1}-\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\frac{C_{n}^{j}}{2(n+j+1)}=0$$

rezultă

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}\frac{C_{2n+1}^{j}}{2n-2j+1}=4^{2n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\frac{C_{n}^{j}}{n+j+1}\ .$$

B I B L I O G R A F I E

1. GANGA, M.: Teme şi probleme de matematică, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1991, p.208

2. FICHTENHOLTZ: Calcul diferenţial şi integral, Ed. Tehnică

3. KURLIANDCIK, D.D.: Matematika v şkole, nr.5, 1987.

SOME ALGEBRAIC IDENTITIES OBTAINED BY USING THE DERIVATIVE AND THE INTEGRAL

ABSTRACT. Some wellknown identities are presented.

UNIVERSITATEA DIN BAIA MARE
Facultatea de Litere şi Ştiinţe
str.Victoriei, 76, 4800 BAIA MARE
ROMÂNIA