Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.2(1992-1993),131-136

IDEALE ÎN SEMIGRUPURI TERNARE

Otilia Ana STAN

Fie $(A,\circ)$ un semigrup. Reamintim că prin semigrup înţelegem o submulţime nevidă S a lui A cu proprietatea că pentru orice $x,y\in S$ avem $xy\in S$, adică S este parte stabilă a lui A în raport cu operaţia binară definită pe A.

O submulţime nevidă $I\subseteq A$ se numeşte ideal stâng (drept) al lui A dacă pentru orice $x\in I$ şi orice $a\in A$ avem $xa\in I (ax\in I)$. Dacă I este ideal stâng şi drept atunci el se numeşte ideal. Evident orice ideal al lui $(A,\circ)$ este sub semigrup al semigrupului $(A,\circ)$. Se demonstrează cu uşurinţă că mulţimea idealelor unui semigrup, ordonată în raport cu incluziunea, formează o latice, adică pentru oricare două ideale I şi J ale lui $(A,\circ)$ există $\inf(I,J)=I\cap J$ şi $\sup(I,J)=\langle I\cup J\rangle$ unde prin $\langle I\cup J\rangle$ s-a notat cel mai mic ideal al lui $(A,\circ)$ ce conţine reuniunea $I\cup J$.

În cele ce urmează vom prezenta o generalizare a acestei noţiuni, considerând o operaţie ternară definită pe mulţimea A şi ilustrând-o prin exemple construite de noi.

<u>Definiţia 1</u>.

Un *semigrup ternar* sau un *3-semigrup* se defineşte ca un sistem algebric $(A,\circ)$ înzestrat cu o operaţie ternară $\circ: A^3 \to A$ care satisface relaţiile

$$((x_1,x_2,x_3)_\circ x_4,x_5)_\circ = (x_1(x_2,x_3,x_4)_\circ x_5)_\circ = (x_1,x_2(x_3,x_4,x_5)_\circ)_\circ$$

$$\forall\, x_i\in A,\ i=\overline{1,5}$$

<u>Definiţia 2</u>

Dacă $(A,\circ)$ este un semigrup ternar, definim recursiv *puterile naturale ale unui element* $x\in A$ astfel:

$$x^{[0]}=x,\ x^{[1]}=(x,x,x)_\circ,\ x^{[2]}=(x^{[1]},x,x)_\circ,\ldots,\ x^{[n]}=(x^{[n-1]},x,x)_\circ,\ldots$$

Definiţia 3

Fie $(A,\circ)$ un semigrup ternar şi $S\subseteq A$, $S\neq\emptyset$. S este un sub-3-semigrup dacă $(S,\circ)$ este 3-semigrup, deci $\forall x_1,x_2,x_3\in S$ avem $(x_1,x_2,x_3)_\circ\in S$ sau unde $(S,S,S)_\circ\subseteq S$, $(S,S,S)_\circ=\{(x_1,x_2,x_3)_\circ \mid x_i\in S;\ i=1,2,3\}$. Convenim să notăm mulţimea $(S,S,S)_\circ$ prin $S^{[1]}$ sau S^3.

Definiţia 4

Un grup A este *surjectiv* dacă $A^{[1]}=A$ unde prin $A^{[1]}$ am notat $(A,A,A)_\circ$.

Definiţia 5

Fie $(A,\circ)$ un semigrup ternar şi $I\subseteq A$. Spunem că I este un ideal stâng dacă $\forall\ x\in I$, $\forall\ a_1,a_2\in A$ avem $(x,a_1,a_2)_\circ\in I$. Relaţia mai poate fi scrisă $(I,A,A)_\circ\subseteq I$. Notăm această incluziune prin $(IA^2)_\circ\subseteq I$.

I este *ideal central* dacă $(a_1,x,a_2)_\circ\in I$, $(A,I,A)_\circ\subseteq I$

I este *ideal drept* dacă $(a_1,a_2,x)_\circ\in I \Leftrightarrow (A,A,I)_\circ\subseteq I$ ceea ce notăm prin $(A^2I)_\circ\subseteq I$.

I este *ideal* 3-semigrupul A dacă este simultan ideal stâng, central şi drept. Un ideal al lui $(A,\circ)$ se notează $I\trianglelefteq A$.
Pentru unificarea sistemului de notaţie vom numi 1-ideal idealul stâng, 2-ideal idealul central şi 3-ideal idealul drept.

TEOREMA 1 *Intersecţia unei familii de k-ideale, $k\in\{1,2,3\}$, ale unui 3-semigrup este k-ideal al acelui 3-semigrup.*

Demonstraţie.

Arătăm spre exemplu pentru k=2, demonstraţia realizându-se analog pentru k=1 şi k=3.
Dacă $I,J\trianglelefteq A$ demonstrăm că $I\cap J\trianglelefteq A$. Într-adevăr $\forall x\in I\cap J$ şi $\forall a_1,a_3\in A$ avem: $x\in I$ şi $x\in J$. Deoarece I este 2-ideal al lui A iar J este tot 2-ideal al lui A, $(a,x,a_3)_\circ\in I$ şi $(a,x,a_3)_\circ\in J$ deci $(a,x,a_3)_\circ\in I\cap J$ ceea ce arată că $I\cap J\trianglelefteq A$. Analog se demonstrează că pentru orice familie $\{I_i\}_{i\in J}$ de 2-ideale ale lui A, $\bigcap_{i\in J} I_i$ este un 2-ideal al lui A.

Definiţia 6.

Dacă $(A,\circ)$ este un semigrup ternar şi X o submulţime nevidă a sa, prin k-idealul generat dat de X(k=1,2,3) înţelegem cel mai mic k-ideal al lui A ce-l conţine pe X. Notăm acest ideal prin ⟨X⟩.

Observaţia 1

Idealul generat de X este dat de intersecţia tuturor k-idealelor lui A ce-l conţin X.

În particular, dacă x={a} atunci k-idealul generat de {a} se notează $(a)_k$ şi se numeşte k-ideal principal.

Relativ la idealul generat de o submulţime X a unui 3-semigrup dăm fără demonstraţie o teoremă de caracterizare:

TEOREMA 2 [1] *Dacă $(A,\circ)$ este un semigrup ternar şi X o submulţime nevidă a sa, atunci k-idealul generat de X este dat de relaţia:*

$$\langle X\rangle = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n \quad \text{unde } X_0=X, \quad X_1 = \begin{cases} (X_0A^2)_\circ & (\text{pentru } k=1) \\ (AX_0A)_\circ & (\text{pentru } k=2) \\ (A^2X_0)_\circ & (\text{pentru } k=3) \end{cases} \ldots$$

$$\ldots\ldots X_n = \begin{cases} (X_{n-1}A^2)_\circ & (\text{pentru } k=1) \\ (AX_{n-1}A)_\circ & (\text{pentru } k=2) \\ (A^2X_{n-1})_\circ & (\text{pentru } k=3) \end{cases}$$

Teoremele 1 şi 2 permit enunţarea următorului rezultat.

Consecinţa 1

Mulţimea k-idealelor unui semigrup ternar formează o latice în raport cu incluziunea adică oricare ar fi familia de k-ideale ale lui $(A,\circ)$, $\{I_i\}_{i\in J}$ există infimum respectiv supremum

$$\inf\{I_i\}_{i\in J} = \bigcap_{i\in J} I_i \text{ , } \sup\{I_i\}_{i\in J} = \langle\bigcup_{i\in J} I_i\rangle$$

În caz particular dacă x={a} din teorema 2 obţinem caracterizarea idealelor principale generate de "a".

Consecinţa 2

Idealul stâng generat de $a \in A$ al unui semigrup ternar $(A, \circ)$ este $(a_1) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (aA^{2n})_\circ$ unde prin $(aA^0)_\circ$ înţelegem $\{a\}$ idealul central, $(a_2) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A^n a A^n)_\circ$ unde $(A^0 a A^0)_\circ = \{a\}$, iar cel drept $(a_3) = \bigcup_{n=0}^{\infty} (A^{2n} a)$ unde $(A^0 a)_n = \{a\}$.

Prin urmare,

$$(a)_1 = \bigcup_{n=0}^{\infty} (aA^{2n}) \quad unde \quad (a, A^0)_\circ = \{ a \}$$

Analog se demonstrează celelalte relaţii.

Dacă *A este surjectiv* adică $A^{[1]}=A$ atunci expresia k-idealelor principale se simplifică astfel:

$$(a)_1 = \{ a \} \cup (aA^2)_\circ$$

$$(a)_2 = \{ a \} \cup (AaA)_\circ \cup (A^2 a A^2)_\circ$$

$$(a)_3 = \{ a \} \cup (A^2 a)_\circ$$

Exemplu

Fie R un inel oarecare. În mulţimea perechilor ordonate de (2,3) respectiv (3,2)-matrici cu elemente dintr-un inel R, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{2,3}(R) \times \mathcal{M}_{3,2}(R)$

$$\mathcal{M} = \{(A, A') = \left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \\ a'_{31} & a'_{32} \end{pmatrix} \right), \ a_{ij}, a'_{ij} \in \mathbf{R}, \ \ i,j = \overline{1,3} \}$$

definim operaţia ternară $\circ : \mathcal{M}^3 \to \mathcal{M}$ astfel

$$((A, A'), (B, B'), (C, C'))_\circ = (AB'C, A'BC') \in \mathcal{M}$$

$\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{2,3}(R)$ şi $\forall A', B', C' \in \mathcal{M}_{3,2}(R)$. Operaţia este asociativă deoarece înmulţirea matricilor este în general asociativă, prin urmare $(\mathcal{M}, \circ)$ este un 3-semigrup.

Submulţimea $S \subset \mathcal{M}$, S $\left\{ \left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) ; a \in \mathbf{R} \right\}$ este un 3-semigrup al lui $\mathcal{M}$ deoarece

$$\left(\left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right) = \left(\begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

$(\mathcal{M}, \circ)$ este izomorf cu 3-semigrupul $(R, \circ)$ unde $(a,b,c)_\circ = abc$ pentru că aplicaţia $f: R \to S$; $f(a) = \left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ este bijecţie şi omomorfism.

Dacă R este inel unitar atunci $\mathcal{M}$ are element unitate $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Submulţimea $\mathcal{J} \subset \mathcal{M}$ definită $\mathcal{J} = \left\{\left(\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) i_1, i_2, i_3, i_1, i_2 \in R\right\}$ este ideal al lui $\mathcal{M}$ deaorece $\forall (B,B'), (C,C') \in \mathcal{M}$ avem

$$(IB'C, I'B, C') = \left(\begin{pmatrix} i_1b_{11}+i_2b_{21}+i_3b_{31} & i_1a_{12}+i_2a_{22}+i_3a_{32} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{pmatrix},\right.$$

$$\left., \begin{pmatrix} i_1a_{11}+i_2a_{21} & i_1a_{12}+i_3a_{22} & i_1a_{13}+i_2a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

unde

$$d_k = (i_1b_{11}+i_2b_{21}+i_3b_{31})C_1k + C(i_1a_{12}+i_2a_{22}++i_3a_{32})C_2k \quad k=\overline{1,3}$$

$$d_l = (i_1a_{11}+i_2a_{21})C_{1lm}+(C_{11}a_{12}+i_2a_{22})C_{2lm}+(i_1a_{13}+i_2a_{23})C_{3lm} = \overline{1,2}$$

deci $(IB'C, I'BC') \in \mathcal{J}$ însă nu este 2-ideal pentru că, de exemplu, dacă $I' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ atunci

$$AI'B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\ (b_{11}+b_{21}) & a_{11}\ (b_{12}+b_{22}) & a_{11}\ (b_{13}+b_{23}) \\ a_{21}\ (b_{11}+b_{21}) & a_{21}\ (b_{12}+b_{22}) & a_{21}\ (b_{13}+b_{23}) \end{pmatrix} \notin I$$

De asemenea, I nu este nici 3-ideal pentru că, dacă de exemplu $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ atunci

$$AB'I = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} \\ b'_{21} & b'_{22} \\ b'_{31} & b'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{13}b_{22}+a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{23}b_{22}+a_{23}b_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{22}b_{31} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{22}b_{31} \end{pmatrix} \notin \mathcal{I}$$

B I B L I O G R A F I E

1.SIOSON,F.M.: Ideals in (m+1)-semigroups, Annali di Matematica pura ed applicata, (IV) vol.LXVIII, 1965, p.161-200.

IDEALS IN TERNARY SEMIGROUPS

ABSTRACT. This paper concerned with 3-semigroups and ideals of 3-semigroups illustrated by our examples.

UNIVERSITATEA DIN BAIA MARE
Facultatea de Litere şi Ştiinţe
str.Victoriei, 76, 4800 BAIA MARE
ROMÂNIA