Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.2(1992-1993),137-146

CÂTEVA DEMONSTRAŢII ALE INEGALITĂŢII MEDIILOR

Nicoleta MADA

În această lucrare ne propunem să oferim o colecţie de demonstraţii ale binecunoscutei inegalităţi a mediilor:

Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt numere pozitive, atunci avem:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \tag{1}$$

Adevărată pentru orice $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Demonstrăm inegalitatea mediilor prin metoda inducţiei matematice.

Facem următoarele notaţii: $A_k = \dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}$ şi $G_k = \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}$ pentru orice $k \geq 2$. Trebuie să demonstrăm că $A_n \geq G_n$, pentru orice $n \in N^*$, şi $n \geq 2$.

Pentru $n=2$ inegalitatea este adevărată $\dfrac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$ adică $A_2 \geq G_2$ (2)

Vom presupune inegalitatea adevărată pentru $n=m$, adică $A_m \geq G_m$ (3) şi demonstrăm că are loc şi pentru $n=m+1$, adică

$$A_{m+1} \geq G_{m+1}$$

Aplicăm inegalitatea (3) $A_m \geq G_m$ numerelor pozitive $a_{m+1}, \underbrace{A_{m+1}, \ldots, A_{m+1}}_{(m-1)\ ori}$ şi obţinem inegalitatea:

$$\frac{a_{m+1}+(m-1)A_{m+1}}{m} \ge \sqrt[m]{a_{m+1}\cdot A_{m+1}^{m-1}}$$

Notăm acum $\frac{a_{m+1}+(m-1)A_{m+1}}{m} = A$ *si* $\sqrt[m]{a_{m+1}\cdot A_{m+1}^{m-1}} = G$.

Aplicăm acum inegalitatea (2) numerelor pozitive A_m şi A şi vom obţine

$$\frac{A_m+A}{2} \ge \sqrt{A_m\cdot A}\ .\ \text{Dar}\quad \frac{A_m+A}{2} = \frac{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_m}{m}+\frac{a_{m+1}+(m-1)A_{m+1}}{m}}{2} =$$

$$= \frac{a_1+a_2+\ldots+a_m+a_{m+1}+(m-1)A_{m+1}}{2m} = \frac{(m+1)A_{m+1}+(m-1)A_{m+1}}{2m} = \frac{2mA_{m+1}}{2m} = A_{m+1}\ .$$

Aşadar $A_{m+1} = \frac{A_m+A}{2} \ge \sqrt{A_m\cdot A}$ dar $A\ge G$ şi $A_m\ge G$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_m\cdot A \ge G\cdot G_m \Rightarrow \sqrt{A_m\cdot A} \ge \sqrt{G\cdot G_m}$ deci

$$A_{m+1} \ge \sqrt{G\cdot G_m} = \sqrt{\sqrt[m]{a_{m+1}\cdot A_{m+1}^{m-1}}\cdot\sqrt[m]{G_m^m}} = \sqrt[2m]{A_{m+1}^{m-1}\cdot a_{m+1}\cdot G_m^m} =$$

$= \sqrt[2m]{A_{m+1}^{m-1}\cdot a_1\cdot a_2\ldots a_{m+1}}$. Prin urmare $A_{m+1} \ge \sqrt[2m]{A_{m+1}^{m-1}\cdot G_{m+1}^{m+1}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A_{m+1}^{2m} \ge A_{m+1}^{m-1}\cdot G_{m+1}^{m+1} \Leftrightarrow A_{m+1}^{m+1} \ge G_{m+1}^{m+1} \Leftrightarrow A_{m+1} \ge G_{m+1}$.

b) Inegalitatea mediilor demonstrată cu ajutorul inegalităţii lui Bernoulli.

Inegalitatea lui Bernoulli (vezi [2]) afirmă că

1. Dacă $\alpha\in\mathbb{R}$, $0<\alpha<1$, atunci $(1+x)^\alpha \le 1+\alpha x$.
2. Dacă $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha<0$ sau $\alpha>1$, atunci $(1+x)^\alpha \ge 1+\alpha x$.

Facem notaţiile $A_k = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{k}$ şi

$G_k = \sqrt[k]{a_1-a_2\ldots a_k}$, $k=2$.

Trebuie să arătăm că $\left|\frac{A_{k+1}}{G_{k+1}}\right|^{k+1} \ge \left|\frac{A_k}{G_k}\right|^k$.

Demonstrație.

Fie $a_{k+1}, \underbrace{A_k \ldots A_k}_{\text{de } k \text{ ori}}$ numere pozitive mai mari sau egale cu zero.

Avem

$$\left(\frac{A_{k+1}}{G_{k+1}}\right)^{k+1} = \left(\frac{k\cdot A_k+a_{k+1}}{k+1}\right)^{k+1} \cdot \frac{1}{(G_{k+1})^{k+1}} = \frac{A_k^{k+1}\left(k+\frac{a_{k+1}}{A_k}\right)^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{1}{G_k^k\cdot a_{k+1}} =$$

$$= \left(\frac{A_k}{G_k}\right)^k \cdot \frac{A_k}{a_{k+1}}\left|\frac{k+\frac{a_{k+1}}{A_k}}{k+1}\right|^{k+1} .$$

Notăm $\frac{a_{k+1}}{A_k} = \alpha \geq 0$. Atunci

$$\left(\frac{k+\alpha}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1+\frac{k+\alpha}{k+1}-1\right)^{k+1} = \left(1+\frac{k+\alpha-k-1}{k+1}\right)^{k+1} =$$

$$= \left(1+\frac{\alpha-1}{k+1}\right)^{k+1} \geq 1+(k+1)\frac{(\alpha-1)}{(k+1)} = 1+\alpha-1 = \alpha .$$

Așadar $\left|\frac{A_{k+1}}{G_{k+1}}\right|^{k+1} = \left|\frac{A_k}{G_k}\right|^k \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \left|\frac{k+\alpha}{k+1}\right|^{k+1} \geq \left|\frac{A_k}{G_k}\right|^k \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = \left|\frac{A_k}{G_k}\right|^k .$

Prin urmare $\left|\frac{A_{k+1}}{G_{k+1}}\right|^{k+1} \geq \left|\frac{A_k}{G_k}\right|^k \geq \ldots \geq \left|\frac{A_2}{G_2}\right|^2 \geq \frac{A_1}{G_1} \geq 1 \Rightarrow$ deci $A_n \geq G_n$, $\forall \in N^*$.

c) Inegalitatea mediilor demonstrată cu ajutorul inegalității $e^x \geq 1+x$; $\forall x \in \mathbb{R}$ (care se demonstrează cu ajutorul derivatelor).

Atunci pentru x=0 avem $1=e^0=e^{\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{a_i}{A_n}-1\right|} = \prod_{i=1}^{n} e^{\left|\frac{a_i}{A_n}-1\right|} \geq \prod_{i=1}^{n}\left|1+\frac{a_i}{A_n}-1\right| =$

$$\geq \prod_{i=1}^{n}\frac{a_i}{A_n} = \frac{a_1\cdot a_2\ldots a_n}{A_n^n} = \frac{G_n^n}{A_n^n} = \left|\frac{G_n}{A_n}\right|^n \Rightarrow 1 \geq \frac{G_n}{A_n} \Rightarrow A_n \geq G_n$$ unde

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{a_i}{A_n}-1\right| = \frac{a_1}{A_n}-1 + \frac{a_2}{A_n}-1 + \ldots + \frac{a_n}{A_n}-1 = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{A_n} - n =$$

$$= \frac{n(a_1+a_2+\ldots+a_n)}{n\cdot A_n} - n = n\cdot\frac{A_n}{n} - n = n-n = 0 .$$

e) Inegalitatea mediilor demonstrată cu ajutorul unei funcţii ajutătoare şi a derivatelor. Considerăm f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{n} G_n \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{a_i}{G_n}\right|^x \cdot \ln a_i$. Inegalitatea mediilor este echivalentă cu $f(1) \geq f(0)$.

<u>Demonstraţie</u>.

Observăm că $f'(x) = \frac{1}{n} G_n \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{a_i}{G_n}\right|^x \cdot \ln \frac{a_i}{G_n}$.

$$f''(x) = \frac{1}{n} G_n \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{a_i}{G_n}\right|^x \ln^2 \frac{a_i}{G_n} .$$

Cum $f'(0) = \frac{1}{n} G_n \sum_{i=1}^{n} 1 \ln \frac{a_i}{G_n} = \frac{1}{n} G_n \left| \ln \frac{a_1}{G_n} + \ln \frac{a_2}{G_n} + \ldots + \ln \frac{a_n}{G_n} \right| =$

$$= \frac{1}{n} G_n \ln \left| \frac{a_1}{G_n} \cdot \frac{a_2}{G_n} \cdots \frac{a_n}{G_n} \right| = \frac{1}{n} G_n \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{G_n} = \frac{1}{n} G_n \ln 1 = 0$$

dar $\ln \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{G_n} = \ln \left| \frac{a_1}{G_n} \cdot \frac{a_2}{G_n} \cdots \frac{a_n}{G_n} \right| = \ln \left| \frac{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}{G_n^n} \right| = \ln \frac{G_n^n}{G_n^n} = \ln 1 = ($

dar $f''(x) = 0 \to f''(0) \geq 0$ rezultă

- 0 este punct critic pentru funcţia aleasă
- f este de două ori derivabilă
- $f''(0) \geq 0$

rezultă că 0 este punct de minim local.

Realizăm tabelul derivatei întâi:

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
f'(x)		0	+ + +		+ + + + +	
f(x)		f(0)	↗	f(1)	↗	

f'(x) creşte pe intervalul $[0,\infty) \to$ funcţia f aleasă creşte pe $[0,\infty) \to$ $\to f(1) \geq f(0)$.

e) Cu notaţiile de la e) considerăm că a_{n+1} este cel mai mare număr din şirului $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$ din $a_{m+1}, A_m, \ldots, A_m$ rezultă media aritmetică, $A_{m+1} = \frac{mAm+a_{m+1}}{m+1}$ şi $a_{m+1}=A_m+b$, unde $b\geq 0$.

Atunci $A_{m+1} = \frac{mAm+A_m+b}{m+1} = A_m+\frac{b}{m+1}$;

$$A_{m+1}^{m+1} = (A_m+\frac{b}{m+1})^{m+1} \geq A_m^{m+1}+(m+1)\frac{b}{(m+1)}A_m^m = A_m^{m+1}+bA_m^m = A_m^m(A_m+b) =$$

$$= A_m^m\cdot a_{m+1} \geq G_m^m\cdot a_{m+1} = a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_m\cdot a_{m+1} = G_{m+1}^{m+1} \Rightarrow A_{m+1}^{m+1} \geq G_{m+1}^{m+1} \Rightarrow A_{m+1} \geq G_{m+1} .$$

f) Demonstrarea inegalităţii mediilor cu ajutorul inegalităţii $a^n+\frac{n}{a} \geq n+1$.

Derivata funcţiei $f(a) = a^{n+1}-(n+1)a+n$, *cu* $n\in N^*$ *şi* $a>0$ are forma:

$$f'(a) = (n+1)a^n-(n+1) = (n+1)(a^n-1) .$$

Pentru a=1 rezultă

$$f'(1) = (n+1)(1-1) = 0 .$$

$$f(1) = 1-(n+1)+n = 1-n-1+n = 0 .$$

Deci funcţia primeşte valoarea cea mai mică.

Numerele $a_1,a_2,\ldots,a_m$ sunt pozitive şi $a = \sqrt[m]{\frac{a_{m+1}}{G_{m+1}}}$.

Din inegalitaea $A_m\geq G_m$ rezultă că trebuie demonstrat că $A_{m+1}\geq G_{m+1}$.

Avem $\frac{a_1+a_2\ldots+a_m}{m} \geq \sqrt[m]{a_1a_2\ldots a_m}$, înmulţim inegalitatea cu a, număr pozitiv. Obţinem astfel

$$\frac{a\cdot a_1+a\cdot a_2+\ldots+a\cdot a_m}{m} \geq \sqrt[n]{a^m\cdot a_1\cdot a_2\ldots a_m} = \sqrt[m]{\frac{a_{m+1}}{G_{m+1}}\cdot a_1\cdot a_2\ldots a_m} = \sqrt[m]{\frac{G_{m+1}^{m+1}}{G_{m+1}}\cdot G_{m+1}}$$

deci $\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_m)a}{m} \geq G_{m+1} \Leftrightarrow a_1+a_2+\ldots+a_m \geq \frac{m}{a}G_{m+1}$ (4).

Dar $a_1+a_2+\ldots+a_m+a_{m+1} = \frac{a\cdot a_1+a\cdot a_2+\ldots+a\cdot a_m+a\cdot a_{m+1}}{a} =$

$$= \frac{a\cdot a_1+a\cdot a_2+\ldots+a\cdot a_m}{a} + a_{m+1} = a_1+a_2+\ldots+a_m+a^mG_{m+1} =$$

$$= \frac{m}{a}G_{m+1}+a^mG_{m+1} = G_{m+1}[\frac{m}{a}+a^m] \geq G_{m+1}(m+1) \quad \text{din}$$

$$a = \sqrt[m]{\frac{a_{m+1}}{G_{m+1}}} \Rightarrow a^mG_{m+1} = a_{m+1} .$$

Deci

$$a_1+a_2+\ldots+a_m+a_{m+1} \geq (m+1)G_{m+1} \Leftrightarrow \frac{a_1+a_2+\ldots+a_m+a_{m+1}}{m+1} \geq G_{m+1} \Leftrightarrow A_{m+1} \geq G_{m+1} .$$

g) Demonstrarea inegalităţii mediilor prin inducţia în "sus" şi în "jos" [6].

<u>Demonstraţie</u>.

Avem inegalitatea mediilor $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n}$ (5)

Pentru numerele $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ avem $y_1^2+y_2^2 \geq 2y_1y_2$.

Luând $y_1^2=x_1\geq 0$; $y_2^2=x_2\geq 0$ obţinem $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2}$ (6)

Înlocuind în (6) pe x_1 prin $\frac{x_1+x_2}{2}$ şi x_2 cu $\frac{x_3+x_4}{2}$ obţinem

$$\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_3+x_4}{2}} \Rightarrow \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4} \geq \left[\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_3+x_4}{2}\right]^{1/2} \geq$$

$$\geq (\sqrt{x_1 \cdot x_2} \cdot \sqrt{x_3 \cdot x_4})^{1/2} = \sqrt[4]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4} .$$

Continuând în acest mod observăm că (5) este adevărată pentru n=1,2,4,8,16... adică orice putere a lui 2. Pentru aceasta să arătăm că dacă inegalitatea (5) este sdevărată pentru n, atunci ea este adevărată şi pentru n-1.

Astfel, înlocuim în (5) pe x_n prin $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}$, pentru

$n\geq 2$. Vom avea

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}+\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}}{n} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_{n-1}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})}{n(n-1)} \geq \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_{n-1}}\ \sqrt[n]{\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}}\ ;$$

de unde $\quad \dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1} \geq (x_1x_2\ldots.x_{n-1})^{1/n}\ (\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1})^{1/2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1})^{1-\frac{1}{n}} \geq (x_1,x_2\ldots x_{n-1})^{1/n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1})^{n-1} \geq (x_1x_2\ldots x_{n-1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}}{n-1}) \geq \sqrt[n-1]{x_1x_2\ldots x_{n-1}}\ ,\ \forall\ x\in\mathbb{N},\ x\geq 2.$$

Ţinând cont de (6) se vede că egalitatea are loc pentru $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

h) Demonstraţie cu ajutorul derivatelor parţiale.

Să privim inegalitatea (6) ca o problemă de analiză. Folosind metoda multiplicatorilor lui Lagrange să găsim cea mai mică valoare a funcţiei $x_1+x_2+\ldots+x_n$ în condiţiile $x_i\geq 0$ şi $x_1\cdot x_2\ldots x_n=1$.

Deoarece minimul funcţiei nu este atins pe frontiera domeniului ($x_i\neq 0$) vom putea utiliza metoda multiplicatorilor lui Lagrange pentru găsirea minimului local.

Să considerăm funcţia:

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = x_1x_2\ldots x_n-\lambda(x_1+x_2+\ldots+x_n) \tag{7}$$

pentru care condiţiile de extremum au forma:

$$f_{xi} = \frac{x_1\cdot x_2\ldots x_n}{x_i} - \lambda = 0\ ;\ i=\overline{1,n} \tag{8}$$

rezultă $x_1=x_2=\ldots=x_n$. Deci există şi este unic un punct de minim local $x_i=1; i=\overline{1,n}$ şi deci $x_1+x_2+...+x_n \geq n$, inegalitate echivalentă cu (2).

i) Demonstraţia lui Bohr pentru inegalitatea mediilor. Introducem conceptul de majorizare.

Fie f(y) şi g(y) două serii formale de puteri

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \; ; \; g(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n \quad a_n, b_n \geq 0, \; n \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Dacă $a_n \geq b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ vom scrie $f(y) \gg g(y)$ în plus, dacă

$$f_1(y) \gg g_1(y)$$

$$f_2(y) \gg g_2(y)$$

atunci evident că şi $f_1(y) \cdot f_2(y) \gg g_1(y) \cdot g_2(y)$.
Să considerăm pentru început majorizarea simplă

$$e^{xy} \gg \frac{x^N y^N}{N!}, \; N=1,2,3... \text{ şi } x \geq 0, \; y \geq 0. \text{ De unde}$$

$$e^{y\sum_{i=1}^{n} x_i} \gg \frac{(x_1 \cdot x_2 ... x_n)^N \cdot y^{nN}}{(N!)^n}$$

Comparând coeficienţii y^{nN} obţinem inegalitatea

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{nN}}{(nN)!} \geq \frac{(x_1 \cdot x_2 ... x_n)^N}{(N!)^n} \tag{10}$$

sau

$$\frac{\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i)\right]^n}{x_1 x_2 ... x_4} \geq \left[\frac{(nN)!}{(N!)^n}\right]^{1/N}, \; \forall N=1,2... \; .$$

Dar conform formulei lui Stirling $k! \sim k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}, \; k \to \infty$, deci

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{(nN)!}{(N!)^n}\right]^{1/N} = n^n \qquad (11)$$

Comparând (10) cu (11) obținem $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2}$.

j) Demonstrația lui Ehlers pentru inegalitatea mediilor.
Arătăm că dacă $x_1 \cdot x_2 \ldots x_n = 1$, $x_i \geq 0$ atunci $x_1+x_2+\ldots+x_n \geq n$. Presupunem că aceasta are loc pentru n și că $x_1 \cdot x_2 \ldots x_{n+1} = 1$.
Fie $x_1 \cdot x_2 \ldots$ două din numerele x_i astfel încât $x_1 \geq 1$ iar $x_2 \leq 1$.
Atunci $(x_1-1)(x_2-1) \leq 0$ sau $x_1x_2+1 \leq x_1+x_2 \Rightarrow x_1+x_2+\ldots+x_n+x_{n+1} \geq 1+x_1x_2+x_3+$ $+\ldots+x_n+x_{n+1} \geq 1+n$ pentru că inegalitatea este adevărată pentru n numere $x_1x_2x_3\ldots x_nx_{n+1}$.
Cum inegalitatea este trivială pentru n=1 obținem $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2}$.

k) Demonstrația lui Iacobsthal pentru inegalitatea mediilor.
Cosiderăm identitatea

$$A_n = \frac{G_{n-1}}{n}\left[(n-1)\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}} + \left(\frac{G_n}{G_{n-1}}\right)^n\right] \qquad (12)$$

unde $A_n = \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$; $G_n = \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}$.

Folosim inegalitatea

$$Z^n+n-1 \geq nZ\text{ , cu } z\geq 0 \text{ si } n\geq 1 \qquad (13)$$

Pentru $n\in\mathbf{N}$ pe (2) obținem din identitatea $Z^n-nz+n-1=(Z-1)(Z^{n-1}+$ $+Z^{n-2}+\ldots+Z-n+1) \geq 0$.

Să luăm $Z=\frac{G_n}{G_{n-1}}$ și din (12) obținem

$$A_n \geq \frac{G_{n-1}}{n}\left[(n-1)\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}}-(n-1)+n\frac{G_n}{G_{n-1}}\right] \tag{14}$$

sau $A_n - G_n \geq \frac{n-1}{n}(A_{n-1}-G_{n-1})$ şi prin inducţie rezultă că $A_n - G_n \geq 0$ deci $A_n \geq G_n$.

B I B L I O G R A F I E

1. LEONTE,A.V., NICULESCU,C.P.: Culegere de probleme de algebră şi analiză matematică

2. KOROVKIN,P.P.: Desigualdades, Ed.MIR, Moscova 1976

3. KURLIANDCIK,D.D.: Neravenstro Cauchy, Matemayika v skole, nr.5, 1978, pag.58-59

4. ROGAI,E.: Tabele şi formule matematice, Ed.Tehnică, 1984

5. ARSINTE,V.: Inegalitatea lui Bernoulli implică inegalitatea mediilor, GM 10/1989, coperta 3

6. ALEXANDRESCU,G.P., DĂNUŢ,Th.: Inegalităţi fundamentale, Buletin matematic, Tîrgovişte, 1987, pag.251-257.

SOME PROOFS OF THE CAUCHY'S INEQUALITY

ABSTRACT. In this paper are presented eight proofs of the well known means or Cauchy inequality (1).

UNIVERSITATEA DIN BAIA MARE
Facultatea de Litere şi Ştiinţe
str.Victoriei, 76, 4800 BAIA MARE
ROMÂNIA