Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.3(1993-1994), 1 - 22

PROBLEME ELEMENTARE PRIVIND APROXIMAREA POLINOMIALĂ A FUNCȚIILOR CONTINUE

Sorin Gh.GAL și Vasile BERINDE

1. Introducere.

În Gazeta Matematică au apărut câteva probleme de aproximare a funcțiilor continue prin polinoame de grad cel mult n sau prin polinoame de grad minim, cu o anumită precizie ε, dată. Fiind adresate elevilor de liceu, a cărui programă de matematică nu include teoria aproximării, problemele nu pot fi explicit formulate în limbajul acestei teorii și, în consecință par a fi singulare, având deci un grad ridicat de dificultate.

Mijloacele prin care sunt rezolvate aceste probleme - acolo unde e cazul [1] - au un caracter artizanal și nu furnizează elevilor o idee clară privind calea prin care ar putea obține o metodă generală aplicabilă acestora.

Din acest motiv, dar și pentru a arăta cum o problemă elementară ne poate conduce la considerarea unor probleme neelementare, ne propunem să prezentăm în continuare abordarea acestui subiect, atât prin mijloace elementare cât și prin metode clasice din matematica superioară.
Sperăm că în acest fel cititorul-elev va fi îndemnat să-și extindă studiul și dincolo de granițele matematicilor elementare. Ne vom ocupa așadar de rezolvarea următoarelor probleme:

Problema 1. Să se determine perechile (p,q) pentru care inegalitatea

$$\left|\sqrt{1-x^2}-px-q\right| \le \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1) ,$$

este adevărată pentru orice $x\in[0,1]$.

(Problema 4, Barajul din 4/30 mai 1983, Gazeta Matematică 10-11/1983, pag.394).

Problema 2. Găsiți un polinom $P\in\mathbb{R}[X]$, de grad minim, astfel încât

$$\left|\frac{x}{x^2+1} P(x)\right| \le 0,1 ,$$

pentru orice $x\in[-1,1]$.

(Problema C:23, Gazeta Matematică, 3/1980, autor L.Panaitopol).

Problema 3. Să se determine un polinom $P\in\mathbb{R}[X]$, de gradul III astfel încât

$$\left|\frac{1}{3-x}-P(x)\right| \le 0,01 ,$$

pentru orice $x\in[-1,1]$.

(Problema 18968, Gazeta Matematică, 10/1981, autor A.Atanasiu).

Problema 4. Să se determine polinomul $P = ax^3+bx^2+cx+d$ știind că

$$\left|\frac{x}{1-x}-P(x)\right| < \frac{1}{32} , (\forall)\, x\in[0,\frac{1}{2}] .$$

(Problema 18358, Gazeta Matematică, 7/1980, autor M.Chiriță)

Problema 5. Arătați că există un singur polinom P de gradul I astfel încât

$$|8x^2+P(x)| \le 1 \ , \ \forall\, x\in[0,1] \ .$$

(Etapa județeană, Maramureș, 1993, autor Vasile Berinde).

Problema 6. Să se determine polinomul cu coeficienți reali

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

știind că

$$\left|\frac{x}{1-x}-P_n(x)\right| \le \frac{1}{2^{n+1}} \ , \ (\forall)\, x\in[0,\frac{1}{2}] \ .$$

(Problema 18764, Gazeta Matematică, 5/1981, autor M.Chiriță).

Problema 7. Arătați că există un singur polinom P(x)=ax+b, pentru care

$$|\sqrt{1-x}-P(x)| \le \frac{1}{8} \ , \ (\forall)\, x\in[0,1] \ .$$

(Problema 23070, Gazeta Mat., 9/1994, autor Vasile Berinde).

Facem întâi câteva observații.

1) Toate funcțiile implicate în problemele date sunt continue, monotone și convexe (sau concave).

2) Problemele 1,5 și 7 pot fi rezolvate folosind cunoștințe până la nivelul clasei a IX-a, după cum vom arăta în continuare, celelalte se adresează -așa cum au apărut ele în Gazeta Matematică- elevilor din clasele XI-XII (problema 2) respectiv celor de clasa a XII-a (problemele 3,4 și 6).

Vom prezenta trei abordări diferite ale acestui tip de probleme: o abordare elementară și două neelementare, bazate pe polinomul de cea mai bună aproximare, respectiv folosind interpolarea polinomială.

2. Abordarea elementară a problemelor de aproximare

Această metodă este adecvată abordării problemelor 1,5 și 7, care cer determinarea polinomului de cea mai bună aproximare, așa cum vom vedea în continuare, în timp ce problemele 2,3,4 și 6 nu sunt de aceeași categorie, după cum rezultă din §3 și §4.

Esența metodei constă în faptul că o dreaptă de ecuație $y=ax+b$ este tangentă unei curbe de ecuație $y=f(x)$, într-un punct de abscisă x_0, dacă și numai dacă x_0 este rădăcină dublă a ecuației

$$f(x)=ax+b\ .$$

Observație. În cazul când $f(x)$ este o funcție de gradul II această proprietate este cunoscută chiar și la nivelul clasei a IX-a.

Rezolvarea problemei 1. Inegalitatea din enunț se poate scrie sub forma echivalentă

$$\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\le px+q\le\sqrt{1-x^2}+\frac{\sqrt{2}-1}{2}\ ,\ (\forall)\,x\in[0,1]\ .$$

Fie $g,h:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\ ,\ x\in[0,1]$$

și

$$h(x)=\sqrt{1-x^2}+\frac{\sqrt{2}-1}{2}\ ,\ x\in[0,1]\ .$$

Fie acum A,B extremitățile arcului de curbă

$$y=g(x)\ ,\ x\in[0,1]\ ,$$

și C,D extremitățile arcului de curbă

$$y=h(x)\ ,\ x\in[0,1]\ .$$

Dreapta de ecuaţie

$$y = px+q$$

satisface condiţia din enunţ dacă este situată, pentru $x\in[0,1]$, între graficele funcţiilor g şi h.

Avem $A\left(0,\frac{3-\sqrt{2}}{2}\right)$, $B\left(1,\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(0,\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$, $D\left(,\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$. Din grafic rezultă, pe de altă parte, că g şi h sunt concave.

Dreapta care trece prin punctele C şi D are ecuaţia

$$y = -x+\frac{\sqrt{2}+1}{2} .$$

Din concavitatea funcţiei h, dar şi direct, prin calcul, rezultă că

$$-x+\frac{\sqrt{2}+1}{2} \le \sqrt{1-x^2}+\frac{\sqrt{2}-1}{2} , \ \forall x\in[0,1] .$$

Într-adevăr relaţia anterioară este echivalentă cu

$$1-x \le \sqrt{1-x^2} , \ x\in[0,1] ,$$

care devine, prin ridicarea la pătrat,

$$-2x(1-x) \le 0 , \ x\in[0,1] , \ \textit{evident} .$$

De asemenea avem

$$\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{2}-1}{2} \le -x+\frac{\sqrt{2}+1}{2} , \ \forall x\in[0,1] ,$$

care este echivalentă cu

$$(\sqrt{2}x-1)^2 \ge 0 .$$

Cum ecuaţia ataşată acestei ultime inecuaţii, adică

$$\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{2}-1}{2} = -x+\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

are rădăcina dublă $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$, rezultă că dreapta CD este situată sub arcul de curbă CD, deasupra arcului de curbă AB și, fiind tangentă arcului de curbă CD, este unica dreaptă cu această proprietate.

Așadar perechea

$\left(-1, \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)$

este singura soluție a problemei.

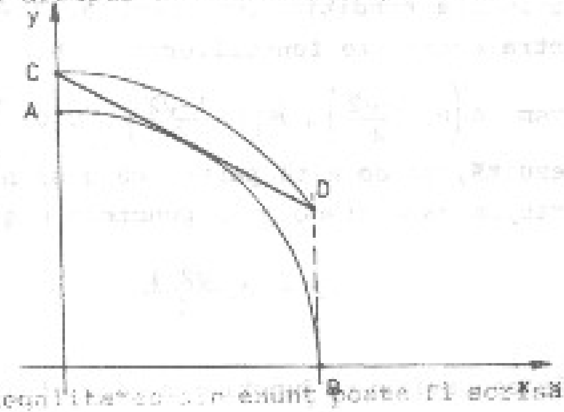


Fig.1

Rezolvarea problemei 5. Inegalitatea din enunț poate fi scrisă sub forma echivalentă

$$|x^2-Q(x)| \le \frac{1}{8} , \ x\in[0,1] ,$$

unde $\qquad Q(x) = -\frac{1}{8}P(x) = ax+b,$ adică sub forma

$$x^2-\frac{1}{8} \le ax+b \le x^2+\frac{1}{8} , \ x\in[0,1] .$$

Fie A și B extremitățile arcului de parabolă

$$y = x^2-\frac{1}{8} , \ x\in[0,1]$$

și C,D extremitățile arcului de parabolă

$$y = x^2+\frac{1}{8} , \ x\in[0,1] ,$$

așadar $A\left(0,-\frac{1}{8}\right)$, $B\left(1,\frac{7}{8}\right)$, $C\left(0,\frac{1}{8}\right)$ și $D\left(1,\frac{9}{8}\right)$.

Dreapta y = ax+b, pentru a răspunde cerințelor problemei trebuie să fie situată, pentru $x\in[0,1]$, între cele două arce de parabolă. Evident cele două arce de parabolă sunt convexe. Dreapta determinată de punctele A și B are ecuația

$$y = x-\frac{1}{8} ,$$

și este situată deasupra arcului de parabolă AB, căci

$$x-\frac{1}{8} \geq x^2-\frac{1}{8} , \ x\in[0,1] .$$

(Acest fapt rezultă și din convexitatea funcției).
Pe de altă parte, avem

$$x-\frac{1}{8} \leq x^2+\frac{1}{8} , \ \forall x\in[0,1]$$

ceea ce este echivalent cu

$$(2x-1)^2 \geq 0 , \ \textit{evident},$$

iar ecuația atașată

$$x-\frac{1}{8} = x^2+\frac{1}{8}$$

are rădăcina dublă $x=\frac{1}{2}$.

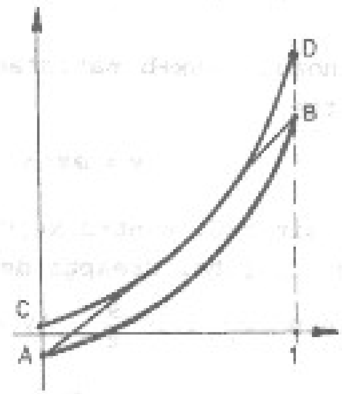


Fig.2

Prin urmare, segmentul de dreaptă AB este situat sub arcul de parabolă CD și este tangent acestuia (Fig.2). Aceasta arată că dreapta AB este unica dreaptă situată între arcele de parabolă AB și CD, așadar $Q(x) = x-\frac{1}{8}$, deci și

$$P(x) = -8Q(x) = 1-8x$$

este unicul polinom care satisface condițiile problemei 5.

Rezolvarea problemei 7. Inegalitatea din enunț se poate scrie echivalent

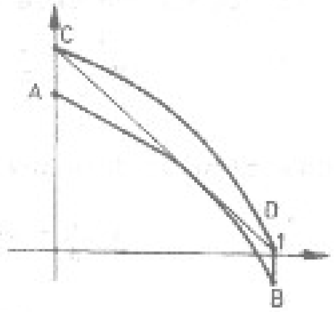
$$\sqrt{1-x}-\frac{1}{8} \leq ax+b \leq \sqrt{1-x}+\frac{1}{8} , \ x\in[0,1] .$$

Fie A, B extremitățile arcului de curbă

$$y = \sqrt{1-x} - \frac{1}{8}\ ,\ x \in [0,1]$$

și C, D extremitățile arcului de curbă

$$y = \sqrt{1-x} + \frac{1}{8}\ ,\ x \in [0,1]\ .$$



Avem $A\left(0, \frac{7}{8}\right), B\left(1, -\frac{1}{8}\right), C\left(0, \frac{9}{8}\right)$ și $D\left(1, \frac{1}{8}\right)$.

Fig.3

Polinomul P=ax+b satisface condițiile problemei dacă dreapta de ecuație

$$y = ax + b$$

este situată, pentru $x \in [0,1]$ între arcele de curbă AB și CD.
Luăm mai întâi dreapta determinată de punctele C și D.
Obținem $a = -1, b = \frac{9}{8}$. Avem apoi că

$$-x + \frac{9}{8} \le \sqrt{1-x} + \frac{1}{8}\ ,\ \forall x \in [0,1]\ ,$$

ceea ce revine la

$$x(1-x) \ge 0\ ,\ x \in [0,1]\ ,\ \textit{evident}\ .$$

De asemenea

$$\sqrt{1-x} - \frac{1}{8} \le -x + \frac{9}{8}\ ,\ \forall x \in [0,1]\ ,$$

ceea ce este echivalent cu

$$(4x-3)^2 \ge 0\ .$$

Așadar segmentul de dreaptă CD este situat sub arcul de curbă CD, deasupra arcului de curbă AB și este tangent acestuia din urmă, deci este unica dreaptă cu aceată proprietate (Fig.3).

Polinomul $P(x) = -x+\frac{9}{8}$ constituie prin urmare unica soluţie a problemei 7.

Observaţie. 1) Putem soluţiona asemănător şi problema 2, dacă cerem ca aproximaţia să fie cea mai bună posibilă, când avem soluţie unică. Soluţia dată acestei probleme în paragraful 3, arată că, în formularea originală, problema 2 nu are soluţie unică;

2) Putem compara prima şi a doua metodă date în această lucrare, prin intermediul problemei 5, pe care am soluţionat-o în două moduri.

3. Polinomul de cea mai bună aproximare.

Fiind dată o funcţie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, continuă pe $[a,b]$, căutăm un polinom P_n de grad cel mult n, pentru care

$$\|P_n-f\| = \inf\{\|f-P\| \,/\, P \text{ polinom de grad} \le n\}$$

unde

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \,/\, x\in[a,b]\} .$$

Polinomul astfel obţinut se numeşte *polinom de cea mai bună aproximare* a funcţiei f prin polinoame de grad ≤ n.
Pentru orice funcţie continuă f pe un interval compact, polinomul de cea mai bună aproximare există şi este unic (a se vedea, spre exemplu [6]) .

Întrucât pentru n>1, problema determinării polinomului de cea mai bună aproximare este o problemă foarte dificilă (existând doar algoritmi iterativi, numiţi algoritmi de tip Remez, a se vedea, spre exemplu [3]), metoda pe care o indicăm în continuare se aplică cu succes pentru n=1 şi în cazul unor clase particulare de funcţii f, spre exemplu în clasa funcţiilor convexe (sau concave).

Din acest motiv vom rezolva prin această metodă problemele 1, 2, 5 şi 7. Ea se bazează pe două rezultate importante din teoria aproximării (a se vedea [5], pag.211).

TEOREMA 1.

Dacă funcţia $f\in C[a,b] = \{f:[a,b]\to\mathbb{R};\ f$ *continuă pe* $[a,b]\}$ *şi* $n\in\mathbb{N}$*, atunci notând cu* $P_n(x)$ *polinomul de cea mai bună aproximare de grad* $\le n$*, există cel puţin* $n+2$ *puncte de alternanţă* $x_i,\ i=\overline{0,n+1}$ *din* $[a,b]$ *care să verifice condiţiile*

$$E_n(f) = |P_n(x_i)-f(x_i)|\ ,\ \forall\ i=\overline{0,n+1}\ ,$$

unde

$$E_n(f) = \inf\{\|f-P\|\ /\ P \text{ polinom de grad } \le n\}\ .$$

NOTĂ. Punctele $x_i,\ i=\overline{0,n+1}$ se numesc puncte de alternanţă dacă semnul diferenţei $P_n(x_i)-f(x_i)$ alternează succesiv de la un punct la altul.

TEOREMA 2.

Dacă $f\in C[a,b]$ *este convexă (sau concavă) pe* $[a,b]$*, atunci* a *şi* b *sunt puncte de alternanţă.*

Teorema 1 ne sugerează următoarea metodă de determinare a polinomului de cea mai bună aproximare, $P_n(x)$.

Pentru aceasta, presupunem că, în plus f este derivabilă pe (a,b). Notăm cu $x_0,\ x_1,\ldots,x_n$ punctele de alternanţă, $E_n(f)=M$ şi $\varepsilon\in\{-1,1\}$. De asemenea, fie $P_n(x) = C_0+C_1x+\ldots+C_nx^n$. Avem

$$\begin{cases} f(x_0)-P_n(x_0)=\varepsilon M \\ f(x_1)-P_n(x_1)=-\varepsilon M \\ \cdot \\ \cdot \\ f(x_{n+1})-P_n(x_{n+1})=(-1)^n\varepsilon M. \end{cases} \qquad (1)$$

Întrucât punctele x_i sunt puncte de extrem (de maxim sau minim) pentru funcţia

$$F(x) = f(x)-P_n(x)\ ,$$

rezultă că

$$F'(x_i) = 0\ ,\ i=0,1,\ldots,n+1\ .$$

Prin urmare, dacă lui (1) îi adăugăm condițiile

$$\begin{cases} f'(x_0)-P_n'(x_0) = 0 \\ f'(x_1)-P_n'(x_1) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f'(x_{n+1})-P_n'(x_{n+1}) = 0\ , \end{cases} \tag{2}$$

obținem un sistem de 2n+4 ecuații cu 2n+4 necunoscute $C_0,C_1,\ldots,C_n$, $x_0,x_1,\ldots,x_{n+1}$ și M.
În cazul $n=1$ obținem sistemul

$$\begin{cases} f(x_i)-(C_0+C_1x_i) = (-1)^i\varepsilon M \\ f'(x_i)-C_1 = 0\ , \end{cases} \qquad i=0,1,2 \tag{3}$$

care este un sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute: x_0,x_1,x_2,C_0,C_1 și M.
Dacă f este convexă (sau concavă) pe [a,b], atunci, conform teoremei 2, avem $x_0=0$ și $x_2=b$, prin urmare sistemul (3) se reduce la

$$\begin{cases} f(a)-C_0-C_1a = \varepsilon M \\ f(x_1)-C_0-C_1x_1 = -\varepsilon M \\ f(b)-C_0-C_1b = \varepsilon M \\ f'(x_1)-C_1 = 0\ , \end{cases} \tag{4}$$

care este un sistem de 4 ecuații cu 4 necunoscute: C_0,C_1, M și x_1.
(Considerațiile anterioare pot fi găsite de exemplu în [4],

pag.102-103).
Sistemul (4) se abordează acum o dată pentru $\varepsilon=1$ şi o dată pentru $\varepsilon=-1$ şi acceptăm valoarea lui ε pentru care sistemul (4) are soluţie.

Rezolvarea problemei 1. Avem $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ şi

$f''(x)=-\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}<0, \forall x\in[0,1)$, deci f este concavă pe [0,1].

Sistemul (4), cu a=b şi b=1 va fi

$$\begin{cases} 1-C_0=\varepsilon M \\ \sqrt{1-x_1^2}-C_0-C_1x_1=-\varepsilon M \\ -C_0-C_1=\varepsilon M \\ -\dfrac{x_1}{\sqrt{1-x_1^2}}-C_1=0 , \ \textit{unde } 0<x_1<1 . \end{cases}$$

Din prima şi a treia ecuaţie avem $C_1=-1$, care înlocuit în ecuaţia a patra ne dă

$$x_1=\sqrt{1-x_1^2} ,$$

a cărei unică soluţie în [0,1] este $x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Înlocuind în ecuaţia a doua rezultă

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-C_0+\frac{\sqrt{2}}{2} = -\varepsilon \ \textit{adica} \ \sqrt{2}-C_0 = -\varepsilon M$$

care împreună cu ecuaţia întâi ne dă

$$1+\sqrt{2}-2C_0 = 0 ,$$

deci

$$C_0 = \frac{1+\sqrt{2}}{2} .$$

În concluzie, pentru $\varepsilon=-1$ (dar nu și pentru $\varepsilon=1$) obținem pentru M o valoare pozitivă

$$M = C_0-1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} .$$

Așadar $P_1(x) = -x+\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ și $E_1 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$, astfel că $(p,q) = \left(-1, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ ne dau unica soluție a problemei 1.

Rezolvarea problemei 5. Inegalitatea din enunț poate fi scrisă sub forma

$$|-8x^2-P(x)| < 1 , (\forall)x\in[0,1] ,$$

deci, în acest sens $f(x) = -8x^2$, f este concavă și sistemul (4) devine

$$\begin{cases} -C_0 = \varepsilon M \\ -8x_1^2-C_0-C_1x_1 = -\varepsilon M \\ -8-C_0-C_1 = \varepsilon M \\ -16x_1-C_1 = 0 , \end{cases}$$

pe care-l rezolvăm astfel. Din ecuațiile 1 și 3 rezultă

$$C_1 = -8$$

care înlocuit în ultima ecuație ne dă

$$x_1 = \frac{1}{2} .$$

Apoi, din ecuația a 2-a deducem

$$2-C_0 = -\varepsilon M$$

care împreună cu prima ecuație ne dă

$$C_0 = 1 .$$

Așadar polinomul căutat este $P_1(x) = -8x+1$, iar M se obține pentru $\varepsilon=-1$, din prima ecuație, adică

$$M=1 \Leftrightarrow E_1(f) = 1 .$$

Unicitatea lui $P_1(x)$ rezultă din unicitatea polinomului de cea mai bună aproximare.

Rezolvarea problemei 7. Avem $f(x)=\sqrt{1-x}$, pentru care $f'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}, x\in[0,1), f''(x)=-\frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}}<0, \forall x\in[0,1)$, deci f este concavă pe [0,1]. Sistemul (4) corespunzător va fi

$$\begin{cases} 1-C_0 = \varepsilon M \\ \sqrt{1-x_1}-C_0-C_1x_1 = -\varepsilon M \\ -C_0-C_1 = \varepsilon M \\ -\frac{1}{2\sqrt{1-x_1}}-C_1 = 0 , \end{cases}$$

pe care îl rezolvăm astfel. Din prima și a treia ecuație deducem $C_1=-1$. Înlocuind în ecuația a patra rezultă

$$2\sqrt{1-x_1} = 1,$$

de unde obținem $x_1=\frac{3}{4}$. Înlocuim acum în ecuația a doua și obținem

$$\frac{5}{4}-C_0 = -\varepsilon M$$

care împreună cu prima ecuație ne dă

$$C_0 = \frac{9}{8} .$$

Pentru M obținem valoare pozitivă, numai pentru $\varepsilon=-1$,

$$M = \frac{1}{8} ,$$

așadar $P(x) = -x+\frac{9}{8}$ este unicul polinom care satisface condițiile problemei.

Rezolvarea problemei 2. Presupunem că gradul minim este 1 și suntem conduși la sistemul (aici $a=-1, b=1, f(x)=\frac{x}{x^2+1}$):

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}-C_0+C_1 = \varepsilon M \\ \frac{x_1}{x_1^2+1}-C_0-C_1x_1 = -\varepsilon M \\ \frac{1}{2}-C_0-C_1 = \varepsilon M \\ \frac{1-x_1^2}{(x_1^2+1)^2}-C_1 = 0 \end{cases}$$

Din prima și a treia ecuație obținem prin scădere

$$-1+2C_1=0 \text{ , adica } C_1=\frac{1}{2} .$$

Mai departe, din ultima ecuație rezultă

$$\frac{1-x_1^2}{(x_1^2+1)^2}-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x_1^4+4x_1^2-1=0$$

care are în $[-1,1]$ două rădăcini

$$x_1=\sqrt{-2+\sqrt{5}} \quad \text{şi} \quad x_1=-\sqrt{-2+\sqrt{5}}\ .$$

Lucrăm mai întâi cu $x_1=-\sqrt{-2+\sqrt{5}}$, înlocuim în ecuaţia a doua şi obţinem, adunându-i prima ecuaţie şi efectuând calculele

$$C_0=\frac{(1-\sqrt{5})\sqrt{-2+\sqrt{5}}}{8}\ .$$

Cum C_0 este negativ iar prima ecuaţie devine

$$-C_0=\varepsilon M\ ,$$

înseamnă că obţinem o valoare pozitivă pentru M numai în cazul $\varepsilon=1$, şi

$$M=\frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{-2+\sqrt{5}}}{8}\ .$$

Deoarece $M<0,1$ înseamnă că polinomul

$$P_1(x)=\frac{(1-\sqrt{5})\sqrt{-2+\sqrt{5}}}{8}+\frac{1}{2}x$$

este unul din polinoamele de grad minim cerute. În acest caz problema nu are soluţie, căci

$$E_1(f)=\frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{-2+\sqrt{5}}}{8}$$

este strict mai mică decât eroarea admisă $\frac{1}{10}$.

Aşadar, într-adevăr polinomul de grad minim care răspunde cerinţelor problemei este cel de grad întâi.

4. Polinomul de interpolare al lui Lagrange

Această metodă se bazează pe estimarea restului în formula de interpolare a lui Lagrange (pentru detalii privind aceste noţiuni, a se vedea [6],[7] şi [8]).

Fie aşadar $f \in C^{n+1}[a,b]$ (mulţimea funcţiilor definite pe $[a,b]$ cu valori în R care au derivate până la ordinul $n+1$ inclusiv continue pe $[a,b]$) şi $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1}$ puncte din $[a,b]$. Notând cu $L_n(f)(x)$ polinomul de interpolare al lui Lagrange de gradul n ataşat funcţiei f pe nodurile $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, adică polinomul care coincide cu f în punctele $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$:

$$L_n(f)(x_i) = f(x_i) \ , i=1,2,\ldots,n+1,$$

are loc următorul rezultat

TEOREMA 3.

$$|f(x)-L_n(f)(x)| \le \frac{|u(x)|\cdot M}{(n+1)!} \ , \ \forall \ x \in [a,b] \ ,$$

unde $\qquad u(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1})$

şi $\qquad M = \max\{|f^{(n+1)}(x)| \,/\, x \in [a,b]\}$.

Observaţii. 1) Polinomul $L_n(f)(x)$ se poate scrie sub forma

$$L_n(f)(x) = \sum_{k=1}^{n+1} l_k(x) f(x_k) \ , \qquad (5)$$

unde

$$l_k(x) = \frac{u_k(x)}{u_k(x_k)} \ , \ cu \ u_k(x) = \frac{u(x)}{x-x_k} \ , \ k=1,2,\ldots,n+1 \ .$$

2) Problema alegerii nodurilor (punctelor) de interpolare $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ astfel încât $|u(x)|$ să fie minim a fost rezolvată de către Cebâşev care a arătat că dacă $[a,b] = [-1,1]$ (a se vedea [4]) atunci pentru

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi \ , \ k=1,2,\ldots,n+1 \ , \qquad (6)$$

se realizează valoarea minimă a funcției $|u(x)|$ și în acest caz avem

COROLARUL 1.

1) Dacă $f\in C^{n+1}[-1,1]$, x_k, $k=1,2,\ldots,n+1$ sunt date de (6) atunci

$$|L_n(f)(x)-f(x)| \le \frac{M}{2^n(n+1)!} \ , \ \forall x\in[-1,1] \ . \qquad (7)$$

2) Dacă $f\in C^{n+1}[a,b]$, pentru

$$x_k = \frac{b-a}{2}\cos\frac{2k-1}{2n+2}\pi+\frac{b-a}{2} \ , \ k=1,2,\ldots,n+1$$

avem

$$|L_n(f)(x)-f(x)| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}\cdot\frac{M}{(n+1)!} \ , \ \forall x\in[a,b] \ . \qquad (8)$$

Observație. Rezultatele cuprinse în teorema 3 și corolarul 1 pot fi găsite spre exemplu în [7], pag.102-103 și 109-110. Putem folosi acum aceste rezultate la abordarea problemelor noastre.

Rezolvarea problemei 3. Avem în acest caz $n=3$ și alegem

$$P = L_3(f)(x) \quad \text{cu} \quad x_k = \cos\frac{2k-1}{8}\pi \ , \ k=1,2,3,4,$$

unde $L_3(f)$ este dat de formula (5). Din estimarea (7) deducem

$$|L_3(f)(x)-f(x)| \le \frac{M}{8\cdot 4!} \ , \ \forall\, x\in[-1,1] \qquad (9)$$

Dar $f(x) = \dfrac{1}{3-x}$ ne conduce la $f^{(IV)}(x) = \dfrac{4!}{(3-x)^5}$, de unde deducem că

$$M = \max\{|f^{(IV)}(x)| / x\in[-1,1]\} = \frac{4!}{2^5} ,$$

și care arată că $L_3(f)(x)$ îndeplinește condițiile problemei.

Observație. Este clar că soluția obținută de noi depășește cu mult exigențele enunțului problemei, căci

$$\frac{1}{2^8} < \frac{1}{100} = 0,01 .$$

În schimb, determinarea efectivă a lui $L_3(f)_{(x)}$ cere un volum destul de mare de calcul, pe care îl lăsăm pe seama cititorului.

Rezolvarea problemei 4. Avem și în acest caz n=3, dar a=0, $b=\frac{1}{2}$ și $f(x)=\frac{x}{1-x}$. Așadar

$$f^{(IV)}(x) = \frac{4}{(1-x)^5} \text{, de unde deducem}$$

$$M = \|f^{(IV)}\| = \frac{4!}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^5} = 4!\cdot 2^5 .$$

Înlocuind în relația (8) primim

$$|L_3(f)(x) - f(x)| \le \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{2^7}\cdot\frac{4!2^5}{4!} , \forall x\in[0,\frac{1}{2}] ,$$

adică

$$|L_3(f)(x) - f(x)| \le \frac{1}{2^6} , \forall x\in[0,\frac{1}{2}]$$

care arată că polinomul de interpolare al lui Lagrange, $L_3(f)_{(x)}$, atașat funcției $f(x)=\frac{x}{1-x}$, pe nodurile

$$x_k = \frac{1}{4}\cos\frac{2k-1}{8}\pi + \frac{1}{4}\ ,\ k=1,2,3,4,$$

este soluție a problemei.
Întrucât

$$\frac{1}{2^6} < \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}\ ,$$

$L_3(f)(x)$ este o soluție mai bună decât cea cerută în enunțul problemei 4.

Observații. 1) Este posibil să obținem soluția acestor două probleme alegând nodurile de interpolare nu neapărat pentru a obține cea mai bună soluție - deci după formulele de aproximare a lui Cebâșev - ci într-o altă manieră, când volumul de calcul se reduce considerabil, problema revenind la rezolvarea unui sistem de ecuații și inecuații liniare de patru necunoscute.

2) Lăsăm pe seama cititorului rezolvarea problemei 6 care, se observă ușor, este o generalizare a problemei 4.

3) Nu vom încheia această lucrare înainte de a îndemna cititorul să compună el însuși noi probleme de acest tip, după modelul pe care il vom indica in continuare. Răspundem astfel unei cerințe a programului Seminarului de Creativitate Matematică, organizat anual la Universitatea din Baia Mare, potrivit căreia rezolvarea creatoare a unei probleme de matematică trebuie să ne conducă la obținerea unor probleme noi sau măcar la completarea problemelor inițiale.

Folosind ideea unicității polinomului de aproximare, din enunțul problemelor 1,5 și 7,pentru funcțiile din problemele 2,3 și 4, obținem următoarele 3 probleme noi, a căror rezolvare o lăsăm pe seama cititorului.

Problema 8. Arătați că există un singur polinom $P(x) = ax+b$ astfel încât

$$\left|\frac{x}{x^2+1}-P(x)\right| \le \frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2(\sqrt{5}+1)}\ ,\ , \text{ pentru orice } x\in[-1,1]\ .$$

Problema 9. Să se determine polinoamele P = ax+b, pentru care

$$\left|\frac{1}{3-x}-P(x)\right| \le \frac{1}{8(3+2\sqrt{2})}\ , \text{ pentru orice } x\in[-1,1]\ .$$

Câte astfel de polinoame există?

Problema 10. Determinați un polinom P(x) de gradul întâi, pentru care

$$\left|\frac{x}{1-x}-P(x)\right| \le \frac{1}{6+4\sqrt{2}}\ , \text{ pentru orice } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\ ,$$

și arătați că acesta este singurul cu această proprietate.

BIBLIOGRAFIE

1.ANDREESCU,T.,ș.a., Probleme de matematică date la concursurile și examenele din 1983
2.DEMIDOVICI,B.P., MARON,I., Computational mathematics, MIR Publishers, Moscow, 1987
3.ICHIM,I., MARINESCU,G., Metode de aproximare numerică, Editura Academiei R.S.R., București, 1986
4.LARIONESCU,D., Metode numerice, Editura Tehnică, București, 1989
5.POPOVICIU,E., Teoreme de medie din analiza matematică și legătura

lor cu teoria interpolării, Editura DACIA, Cluj-Napoca, 1977

6. RIZZOLI, I., Polinoame de interpolare. Aplicații la rezolvarea sistemelor liniare și calculul unor sume, Gazeta Matematică, XI(1990), nr.2, 53-57

7. STANCU, D.D., Curs și probleme de analiză numerică, vol.I, Litografiat, Univ."Babeș-Bolyai", Cluj-Napoca, 1977

8. STANCU, D.D., Interpolarea liniară cu aplicații la aproximări numerice, Gazeta Matematică, LXXXIV(1979), nr.11, 401-404

ELEMENTARY PROBLEMS ABOUT THE APPROXIMATION OF CONTINUOUS FUNCTIONS

ABSTRACT. The aim of this paper is to emphasize three approaches for solving some elementary problems about the approximation of a continuous function by polynomials.

The first approach is based only on elementary considerations, while the last two approaches use the best approximation polynomials and the Lagrange's interpolation formula, respectively.

Universitatea din Oradea
Catedra de Matematică
str.Armatei Române, nr.5
3700 ORADEA

Universitatea din Baia Mare
Catedra de Matematică Informatică
str. Victoriei, nr.76
4800 BAIA MARE