Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.3(1993-1994),23-28

UN EXEMPLU DE GRUP TERNAR DEFINIT PE PUNCTELE UNEI ELIPSE

Maria S.POP

În lucrarea [2] s-au prezentat trei exemple de grupuri ternare definite pe punctele unei parabole. În cele ce urmează vom defini, pe mulțimea punctelor unei elipse, o operație ternară care îi conferă acestei mulțimi o structură de grup ternar. Noțiunile și notațiile utilizate sunt cele din paragraful § 1 al lucrării [2].

Definiție. Fie $\mathscr{E}$ mulțimea unei elipse date și $\circ: \mathscr{E}^3 \to \mathscr{E}$ operația ternară astfel definită:

1° Dacă $M_1, M_2, M_3 \in \mathscr{E}$ sunt puncte distincte ale elipsei și tangenta în M_2 la elipsă nu este paralelă cu dreapta M_1M_3 atunci $(M_1, M_2, M_3)_\circ = M_4$, unde M_4 este punctul in care paralela dusă prin M_2 la M_1M_3 retaie elipsa (Fig.1a);

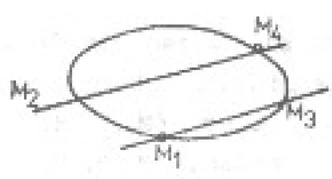

Fig.1a).

2° Dacă $M_1, M_2, M_3 \in \mathcal{E}$ sunt distincte şi tangenta în M_2 la elipsă este paralelă cu $M_1 M_3$, atunci $(M_1,M_2,M_3). = M_2$ (Fig.1b);

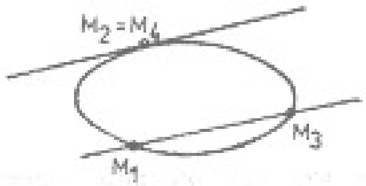

Fig.1b).

3° Dacă $M_1 = M_3 \neq M_2$, atunci $(M_1,M_2,M_1). = M_4$ unde M_4 este punctul în care paralela dusă prin M_2 la tangenta în M_1 la elipsă retaie parabola (Fig.1c)

Fig.1c).

4° Dacă $M_1 = M_3 \neq M_2$ şi tangentele la elipsă în M_1 şi M_2 sunt paralele, atunci $(M_1,M_2,M_1). = M_2$;

5° Dacă $M_1 = M_2 \neq M_3$, atunci $(M_1,M_1,M_3). = M_3$;

6° Dacă $M_1 \neq M_2 = M_3$, atunci $(M_1,M_2,M_2). = M_1$;

7° Dacă $M_1 = M_2 = M_3$, atunci $(M_1,M_1,M_1). = M_1$.

Propoziție. *Perechea $(\mathscr{E},\circ)$ este un grup ternar semicomutativ, fără element unitate cu toate elementele idempotente, izomorf cu grupul ternar $(U,*)$ al numerelor complexe de modul 1 unde operația $*: U^3 \to U$ se definește astfel*

$$(z_1,z_2,z_3)_* = \frac{z_1 z_3}{z_2}\ ,\ \forall\ z_1,z_2,z_3 \in U$$

Demonstrație. Știm că elipsa se definește ca locul geometric al punctelor M din plan care au suma distanțelor la două puncte F_1, F_2 numite focare constantă, fie ea 2a.
Dacă 2c este distanța dintre focare, atunci putem scrie

$$\mathscr{E} = \{M / d(M,F_1) + d(M,F_2) = 2a\ ;\ d(F_1,F_2) = 2c\}$$

Raportând elipsa la un reper cartezian format din axa focarelor și mediatoarea segmentului F_1F_2, se știe că punctul $M(x,y) \in \mathscr{E}$ dacă și numai dacă există $t \in [0,2\pi)$ astfel încât $x = a \cos t$ și $y = b \sin t$ unde $b^2 = a^2 - c^2$. Există o corespondeță biunivocă între mulțimea punctelor elipsei și mulțimea valorilor parametrului $t \in [0,2\pi]$ deci putem identifica punctele elipsei $\mathscr{E}$ cu mulțimea perechilor ordonate de numere reale

$$\{M(a\cos t,\ b\sin t)\ ;\ t \in [0,2\pi]\}$$

Fie $M_k(a \cos t_k,\ b \sin t_k)$ $t_k \in [0,2\pi)$, $k=1,2,3$ trei puncte distincte ale elipsei; în cazul în care M_1 și M_3 nu sunt simetrice față de axa focarelor coeficientul unghiular al dreptei M_1M_3 unde $M_1 \neq M_3$ deci $t_1 \neq t_3$ este

$$m_{M_1M_3} = \frac{b}{a}\,\frac{\sin t_3 - \sin t_1}{\cos t_3 - \cos t_1} = -\frac{b}{a}\, ctg\frac{t_1+t_3}{2}\ ,$$

Paralela prin M_2 la M_1M_3 are ecuația:

$$y - b\sin t_2 = -\frac{b}{a}\, ctg\frac{t_1+t_3}{2}\,(x - a\cos t_2)\ .$$

Ea retaie elipsa $\mathscr{E}$ în punctul $M_4(a\cos t_4, b\sin t_4)$ unde t_4 se determină din ecuația $\sin t - \sin t_2 = -ctg\frac{t_1+t_3}{2}(\cos t - \cos t_2)$ deci, $ctg\frac{t+t_2}{2} = ctg\frac{t_1+t_3}{2}$. De aici avem $t = t_1 - t_2 + t_3$ sau $t = 2\pi + t_1 - t_2 + t_3$, soluții ce conduc la același punct

$$M_4(a\cos(t_1-t_2+t_3), b\sin(t_1-t_2+t_3)).$$

Dacă M_1 și M_3 sunt simetrice față de axa focarelor, deci $t_3 = 2\pi - t_1$, atunci dreapta M_1M_3 are ecuația $x = a\cos t_1$ iar paralela prin M_2 la această dreaptă taie elipsa din nou în punctul M_4 corespunzător parametrului $t_4 = 2\pi - t_2$. Putem scrie și în acest caz că $t_4 = t_1 - t_2 + t_3$.

Dacă tangenta la elipsă în M_2 este paralelă cu M_1M_3, deoarece coeficientul unghiular al ei este $m_{tgM_2} = \frac{y'(t_2)}{x'(t_2)} = -\frac{b}{a}ctg\, t_2$, din relația $m_{M_1M_3} = m_{tgM_2}$ deducem că $t_1 + t_3 = 2t_2$ sau $t_2 = t_1 - t_2 + t_3$.

Analog și în toate celelalte situații 3°-7° se deduce ca un simplu exercițiu că punctul $(M_1, M_2, M_3)_*$ corespunde valorii parametrului $t = t_1 - t_2 + t_3$ dacă $t_1 + t_3 \geq t_2$ sau $t = 2\pi + t_1 - t_2 + t_3$ dacă $t_1 + t_3 < t_2$.

Prin urmare putem "uniformiza" definiția punctului $(M_1, M_2, M_3)_*$, ca rezultat al operației ternare, ca fiind

$$M_4(a\cos(t_1-t_2+t_3); b\sin(t_1-t_2+t_3)).$$

Fie acum $U = \{z = \cos t + i\sin t\ ;\ t \in [0, 2\pi)\}$ mulțimea numerelor complexe de modul unitate și operația ternară $*: U^3 \to U$ $(z_1, z_2, z_3)_* = \frac{z_1 z_3}{z_2}$. Se verifică ușor că această operație este semicomutativă, asociativă și că ecuațiile

$$(z_1, z_2, z)_* = z_3 \quad \text{şi} \quad (z_1, z, z_2)_* = z_3$$

au soluţie unică în U oricare ar fi $z_1, z_2, z_3 \in U$.

Deoarece $(z,z,z)_* = z$ pentu orice $z \in U$ rezultă că transversala oricărui element coincide cu el însuşi. Am demonstrat astfel că $(U,*)$ este un grup ternar, semicomutativ, cu toate elementele idempotente şi fără unitate.

Aplicaţia $f: \mathscr{E} \to U, f(M) = z$ care asociază fiecărui punct $M(a\cos t, b\sin t); t \in [0,2\pi)$ al elipsei, numărul complex $z = \cos t + i\sin t$ este o bijecţie. Mai mult, conform celor mai înainte demonstrate avem

$$f((M_1, M_2, M_3)_\circ) = f(a\cos(t_1 - t_2 + t_3), b\sin(t_1 - t_2 + t_3)) =$$

$$= \cos(t_1 - t_2 + t_3) + i\sin(t_1 - t_2 + t_3) = \frac{(\cos t_1 + i\sin t_1)(\cos t_3 + i\sin t_3)}{\cos t_2 + i\sin t_2} =$$

$$= \frac{(f(M_1) \cdot f(M_3)}{f(M_2)} = \frac{z_1 \cdot z_3}{z_2} = (z_1, z_2, z_3)_*$$

Aceasta demonstrează, conform teoremei 1.2 din lucrarea [2], că perechea $(\mathscr{E}, \circ)$ este deasemenea un grup ternar semicomutativ, fără unitate, cu toate elementele idempotente.

Observaţie. Dacă fixăm punctul M_2 în punctul A(a,0) atunci operaţia binară $\oplus$: $\mathscr{E} \to \mathscr{E}$; $M_1 \oplus M_3 = (M_1, A, M_3)_\circ$ defineşte pe mulţimea punctelor elipsei un grup abelian cu unitatea în A, izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor complexe de modul unitate.

Am regăsit astfel problema nr.13 din culegerea de probleme [1] apărută în Gazeta Matematică [3]

BIBLIOGRAFIE

1. NĂSTĂSESCU, C., ŢENA, M., ş.a., Probleme de structuri algebrice, Bibl.profesorului de matematică, Ed.Acad.Române, 1988

2. POP, M.S., Structuri algebrice ternare definite pe punctele unei parabole, Lucr.Sem.de Creativ.Mat., vol.II, 1992-1993, pag.25-40, Univ.Baia Mare.

3. x x x Gazeta Matematică nr.8 / 1985, problema nr.20526, p.318

AN EXAMPLE OF TERNARY GROUP DEFINED ON THE POINTS OF AN ELLIPSE

ABSTRACT. Let $\mathscr{E}$ be the points set of an ellipse and $\circ: \mathscr{E}^3 \to \mathscr{E}$ a ternary operation defined as follows:

- If $M_1 \neq M_2 \neq M_3$ then $(M_1, M_2, M_3)_\circ$ is the point in which the parallel of M_1M_3 (or of the tangent to $\mathscr{E}$ in M_1 if $M_1 = M_3$) through M_2 intersects again the ellipse (Fig.1a respectively Fig.1c);
- If the tangent to $\mathscr{E}$ in M_2 is parallel to M_1M_3, then $(M_1, M_2, M_3)_\circ = M_2$ (Fig.1b);
- If $M_1 = M_2$ then $(M_1, M_1, M_3)_\circ = (M_3, M_1, M_1)_\circ = M_3$ (also for $M_3 = M_1$).

$(\mathscr{E}, \circ)$ is an semicommutative ternary group isomorphic to the 3-group $(U, *)$ where $U = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ and $*: U^3 \to U; (z_1, z_2, z_3)_* = \frac{z_1 z_3}{z_2}$.

Universitatea din Baia Mare
str.Victoriei nr.76, 4800-Baia Mare
ROMÂNIA