Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.3(1993-1994),29 - 42

DOUĂ STRATEGII DE ABORDARE A PROBLEMELOR DE URMĂRIRE

Vasile BERINDE

Manualele de algebră pentru gimnaziu [1] şi [2] includ două probleme de natură practică, pe care noi le vom numi în continuare probleme de urmărire:

PROBLEMA 1.

Un ogar fuge după o vulpe care se află la distanţa de 30 m de el. Săritura ogarului este de 2 m. Săritura vulpii este de 1 m. În timpul în care vulpea face 3 sărituri, ogarul face 2 sărituri. Ce distanţă trebuie să parcurgă ogarul pentru a ajunge vulpea?

([1], pag.131, Probleme suplimentare, Probl.32)

PROBLEMA 2.

Un ogar urmăreşte o vulpe care are 60 sărituri înaintea lui. Peste câte sărituri va ajunge ogarul vulpea, ştiind că, pe când ogarul face 6 sărituri, vulpea face 9, dar că 3 sărituri de-ale ogarului fac cât 7 de-ale vulpii?

([2], pag.22, probl. 25, xi)

Dată fiind singularitatea acestor probleme, dificile pentru un elev de clasa a VI-a, respectiv de clasa a VIII-a, ele sunt considerate ca probleme de perspicacitate, neacordându-li-se importanţa cuvenită, deşi sunt sunt probleme cu caracter practic, probleme cărora întotdeauna profesorul de matematică ar trebui să le acorde o atenţie specială.

Prezentăm în continuare un studiu aprofundat al acestei clase de probleme, vizând utilitatea lui mai ales pentru profesorul de matematică, dar care ar putea să intereseze şi elevii, care pot să-şi formeze astfel o metodă unitară,clară şi sigură de abordare a acestui tip de probleme.

Este clar că Problema 1 are un enunţ simplificat, care o face mai accesibilă, deşi, în esenţă, este similară Problemei 2.
O vom rezolva mai întâi pe aceasta din urmă .

STRATEGIA 1.

1)Notăm cu x numărul de sărituri necesare ogarului pentru a ajunge vulpea, şi cu y numărul de sărituri pe care le face vulpea din momentul începerii urmăririi şi până în momentul în care este ajunsă de ogar.
Într-o unitate de timp,

ogarul face 6 sărituri

iar

vulpea face 9 sărituri,

aşadar pe toată durata urmăririi, raportul dintre numărul săriturilor ogarului şi vulpii este acelaşi, adică

$$\frac{x}{y}=\frac{6}{9} \Rightarrow 9x=6y \qquad (1)$$

Pe de altă parte, lungimea a 3 sărituri ale ogarului este aceeaşi cu lungimea a 7 sărituri de-ale vulpii.
Pe aceeaşi distanţă, adică din punctul în care ogarul începe urmărirea şi până în punctul în care acesta ajunge vulpea,

ogarul face x sărituri

iar

vulpea face 60+y sărituri,

deci, ţinând seama de faptul că, pe o aceeaşi distanţă, raportul dintre lungimea săriturilor acestora rămâne constant, obţinem că

$$\frac{x}{60+y}=\frac{3}{7} \Rightarrow 7x=3(60+y) \qquad (2)$$

Obţinem astfel sistemul

$$\begin{cases}3x = 2y\\ 7x = 3(60+y)\end{cases}$$

cu soluţia $\begin{cases}x=72\\ y=108\end{cases}$

Aşadar ogarul are nevoie de 72 sărituri pentru a ajunge vulpea. Aceasta a făcut 108 sărituri, din momentul inceperii urmăririi şi până când a fost ajunsă.

Observaţia 1. Ecuaţia (2) putea fi obţinută şi astfel:

3 sărituri ogar ... fac cât 7 sărituri vulpe

x sărituri ogar ... fac cât 60+y sărituri vulpe,

deci, regula de trei simplă (altă exprimare a proporţionalităţii) ne dă

$$3\cdot(60+y)=x\cdot 7\ .$$

2) Rezolvăm acum şi problema 1, al cărei enunţ il convertim la specificul problemei 2.

Cum săritura vulpii are lungimea de 1 m, rezultă că ea are un avans de 30 de sărituri faţă de ogar şi că <u>lungimea</u>

a 1 săritură ogar = lungimea a 2 sărituri ale vulpii.

Pe de altă parte, într-o unitate de timp

ogarul face 2 sărituri

iar

vulpea face 3 sărituri.

Păstând notaţiile

x = nr.săriturilor ogarului

y = nr.săriturilor vulpii,

obţinem condiţia

$$\frac{x}{y}=\frac{2}{3}\Rightarrow 3x=2y\ , \qquad (3)$$

ca şi în cazul problemei 2.

Pe aceeaşi distanţă, adică din punctul în care ogarul începe urmărirea şi până în punctul în care acesta ajunge vulpea

ogarul face x sărituri

iar

vulpea face $30+y$ sărituri.

Aşadar, ţinând seama de faptul că 2 sărituri de-ale vulpii fac cât o săritură de-a ogarului, trebuie să avem

$$2 \cdot x = 1 \cdot (30+y) \tag{4}$$

Sistemul format din ecuaţiile (3) şi (4) are soluţia

$$\begin{cases} x = 60 \\ y = 90, \end{cases}$$

deci ogarul face 60 sărituri pentru a ajunge vulpea, deci parcurge

$$60 \cdot 2\ metri = 120\ metri\ .$$

Observaţia 2. Evident, soluţia precedentă dată problemei 1 nu poate fi acceptată ca fiind accesibilă unui elev de clasa a VI-a, de aceea dăm separat o soluţie mai simplă care ţine seama, în fapt, de enunţul mai concret al acestei probleme.

În aceeaşi perioadă de timp

ogarul face 2 sărituri (o săritură de 2 m)

iar

vulpea face 3 sărituri (o săritură de 1 m),

deci, într-o unitate de timp,

ogarul parcurge 4 m

iar

vulpea parcurge 3 m,

aşadar, dacă notăm cu x distanţa parcursă de vulpe, din momentul începerii urmăririi şi până când este ajunsă, obţinem că

ogarul a parcurs 30+x metri

iar

vulpea a parcurs x metri,

deci cum raportul dintre distanțele parcurse în unitatea de timp este $\frac{4}{3}$, trebuie să avem

$$\frac{30+x}{x} = \frac{4}{3}, \tag{5}$$

adică

$$90+3x = 4x \Leftrightarrow x = 90 .$$

Așadar, ogarul parcurge 30+90 = 120 m pentru a ajunge vulpea.

Să trecem acum la rezolvarea, prin aceeași strategie, a problemei următoare, care generalizează problema 2.

PROBLEMA 3. Un ogar urmărește o vulpe care are N sărituri înaintea lui. Peste câte sărituri va ajumge ogarul vulpea, știind că, pe când ogarul face a sărituri, vulpea face b sărituri, iar p sărituri de-ale ogarului fac cât q sărituri de-ale vulpii?

<u>Soluție</u>. Notăm cu x = nr.de sărituri necesare ogarului pentru a ajumge vulpea și cu y = nr.de sărituri pe care le face vulpea din momentul începerii urmăririi și până în momentul în care vulpea este ajunsă de ogar.

În aceeași <u>unitate de timp</u>,

ogarul face a sărituri

iar

vulpea face b sărituri,

prin urmare, pe durata urmăririi, trebuie să avem

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow bx-ay = 0 \tag{6}$$

Dar

lungimea a p sărituri ale ogarului

este egală cu

lungimea a q sărituri ale vulpii.

Pe aceeaşi distanţă, adică din punctul în care începe urmărirea şi până în punctul în care se termină,

ogarul face x sărituri

iar

vulpea face N+y sărituri,

şi cum raportul dintre numărul săriturilor efectuate pe o aceeaşi distanţă este egal cu raportul dintre lungimile săriturilor lor, deducem

$$\frac{x}{N+y} = \frac{p}{q} \leftrightarrow qx-py = pN \,. \qquad (7)$$

Obţinem astfel sistemul

$$\begin{cases} bx-ay = 0 \\ qx-py = pN \end{cases} \qquad (8)$$

Deoarece p>0, N>0, sistemul are soluţie (unică) dacă ecuaţia, obţinută prin reducerea necunoscutei y,

$$(aq-bp)\,x = apN$$

are soluţie unică, adică

$$\frac{a}{b} \neq \frac{p}{q} \,, \qquad (9)$$

respectiv raportul dintre lungimea săriturilor efectuate în unitatea de timp este diferit de raportul dintre numărul săriturilor efectuate în unitatea de distanţă.

Presupunând (9) satisfăcută, obţinem soluţia

$$\begin{cases} x = \dfrac{apN}{aq-bp} \\ y = \dfrac{bpN}{aq-bp} \,. \end{cases} \qquad (10)$$

Ţinând seama de semnificaţia mărimilor x şi y, care sunt numere pozitive (în general, întregi), trebuie să avem aq-bp > 0, adică

$$\frac{a}{b} > \frac{p}{q}, \tag{9'}$$

pentru ca problema să nu se îndepărteze de semnificația ei practică. Ceea ce înseamnă că, pentru ca ogarul să poată ajunge vulpea, este necesar și suficient să fie îndeplinită condiția (9').

Cazuri particulare.

1) În cazul problemei 1, N=30, a=2, b=3, p=1, q=2 și

$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2} = \frac{p}{q}$, când $aq-bp=1$, deci

$$x = 2 \cdot 1 \cdot 30 = 60$$

$$y = 3 \cdot 1 \cdot 30 = 90\ .$$

2) În cazul problemei 2, N=60, a=6, b=9, p=3, q=7 și

$\frac{a}{b} = \frac{6}{9} > \frac{3}{7} = \frac{p}{q}$, când $aq-bp = 42-27 = 15$

și soluția este

$$x = \frac{6 \cdot 3 \cdot 60}{15} = 72$$

$$y = \frac{9 \cdot 3 \cdot 60}{15} = 108\ .$$

Observația 3. În ambele probleme considerate de noi, ogarul ajunge vulpea, pentru că lungimea săriturii sale este mai mare decât cea a vulpii, deși, în aceeași perioadă de timp, el face mai puține sărituri decât vulpea.

Dar este posibil ca, un alt câine de vânătoare - care are lungimea săriturii mai mică decât a vulpii - să ajungă totuși vulpea, dacă acesta efectuează mai multe sărituri decât vulpea în aceeași unitate de timp.

Condiția (9') ne arată că acest lucru este într-adevăr

$$y = \frac{bpN}{aq-pb} = \frac{4\cdot 6\cdot 20}{2} = 240 \quad \text{(paşi)}$$

Pe aceeaşi distanţă: Mădălina face 300 paşi, iar Ruxandra 240+20=260 paşi.

Observaţia 5. 1)Recomandăm cititorului să compună singur oricât de multe probleme crede că i-ar fi suficiente pentru a-şi însuşi bine această strategie de rezolvare. Pentru aceasta este suficient să-şi aleagă mai întâi a,b,p şi q astfel încât să aibă loc (9'), apoi va alege numărul N astafl încât

$N \vdots (aq-bp)$, pentru ca $x,y \in \mathbb{N}$;

2)Deşi problemele de acest tip sunt destul de dificile în forma deja întâlnită, propunem sporirea dificultăţii lor prin adăugarea unei limite (în timp sau spaţiu) de desfăşurare a urmăririi. Vom numi aceste noi probleme "probleme de urmărire limitată". Această limitare este foarte naturală căci ogarul nu poate să alerge oricât de mult timp.Un exemplu tipic este dat de

PROBLEMA 6. Mădălina trebuie să parcurgă 1200 paşi în cadrul antrenamentului său. Ea se antrenează împreună cu Ruxandra care a făcut deja 80 paşi când Mădălina îşi începe antrenamentul. Ştiind că în timp ce Mădălina face 5 paşi, Ruxandra face 4 şi că 7 paşi de-ai Mădălinei fac cât 6 paşi de-ai Ruxandrei, să se spună dacă Mădălina o va ajunge în timpul antrenamentului său pe Ruxandra.

Rezolvare. Avem N=80, a=5, b=4, p=7, q=6, deci Mădălina ar ajunge-o pe Ruxandra după

$$x = \frac{5\cdot 7\cdot 80}{2} = 1400 \quad \text{(paşi)},$$

dar cum ea parcurgr numai 1200 paşi pe traseul de urmărire, răspunsul la intrebarea din enunţ este "nu".

STRATEGIA 2. (aplicată la problema 2)

Notăm cu S = distanţa parcursă de ogar în timpul urmăririi

cu z = lungimea unei sărituri a ogarului

şi cu t = lungimea unei sărituri a vulpii.

Atunci avem

$$3z = 7t \tag{11}$$

Dacă vulpea a făcut m sărituri în timpul urmăririi, atunci ea a făcut

$$60+m \text{ sărituri}$$

pentru a parcurge distanţa S, deci

$$S = (m+60)\cdot t$$

Pe de altă parte, dacă n este numărul săriturilor ogarului, atunci

$$S = n\cdot z ,$$

deci

$$(m+60)\cdot t = n\cdot z ,$$

care ţinând seama de (11), ne dă

$$3(m+60) = 7n \tag{12}$$

Pe de altă parte, raportul dintre numărul săriturilor efectuate de ogar şi numărul săriturilor efectuate de vulpe în aceeaşi perioadă de timp trebuie să fie

$$\frac{6}{9} ,$$

deci $$\frac{n}{m} = \frac{6}{9} \tag{13}$$

Din (12) şi (13) obţinem acum

$$n = 72 \quad \text{şi} \quad m = 108 .$$

Este uşor de văzut că ecuaţiile (12) şi (13) coincid cu ecuaţiile (2) şi (1) obţinute prin prima strategie.

Lăsăm cititorului misiunea de a aborda singur alte probleme - pe care şi le-a propus singur - prin această a doua cale, precum şi următoarele probleme:

PROBLEMA 7. Un câine aleargă după un iepure care se află cu 40 de sărituri înaintea câinelui. Câinele face 7 sărituri în timp ce iepurele face 9, dar 3 sărituri de-ale câinelui sunt cât 5 sărituri de-ale iepurelui. Câte sărituri trebuie să facă câinele ca să ajungă iepurele?

(Problema 4, pag.231 din [3])

<u>Notă</u>. Soluţia aritmetică dată problemei de mai sus în [3], ar putea constitui oa treia strategie de abordare a acestei clase de probleme, pe care o recomandăm cititorului.

PROBLEMA 8. O vulpe care face $2\frac{1}{3}$ salturi pe secundă se află la o distanţă de $30\frac{3}{4}$ salturi de câinele care o urmăreşte şi care reuşeşte să facă $4\frac{1}{2}$ salturi pe secundă. Peste cât timp câinele va ajunge vulpea, dacă 3 salturi de-ale câinelui fac cât 2 salturi de-ale vulpii?

([4], problema 42, pag.195)

PROBLEMA 9. Ionică are 30 paşi înaintea lui Petrică, iar Petrică face 9 paşi în timp ce Ionică face 10 paşi. Să se afle câţi paşi va face Petrică până îl va ajunge pe Ionică dacă:

a) 4 paşi ai lui Petrică fac cât 5 paşi ai lui Ionică?

b) 4,5 paşi ai lui Petrică fac cât 5 paşi ai lui Ionică?

(C.Poghiş, G.M. 11/1982; Probl.73, pag.254, [3])

Dar clasa problemelor de urmărire, pe care le putem compune prin metoda pe care am indicat-o anterior, poate fi îmbogăţită cu probleme analoage celor ce urmează, probleme care au un mai mare grad de dificultate.

PROBLEMA 10. Un câine urmăreşte un iepure. În timp ce câinele face 3 sărituri, iepurele face 5, dar 4 sărituri de-ale câinelui fac cât 7 sărituri de-ale iepurelui. Să se afle cu câte sărituri era iepurele în faţa câinelui, la începutul urmăririi, ştiind că acesta din urmă l-a ajuns după 60 de sărituri.

PROBLEMA 11. Un ogar urmărește o vulpe care are 25 sărituri înaintea lui. Știind că în timp ce ogarul face 3 sărituri, vulpea face 7 și că 2 sărituri de-ale ogarului fac cât n sărituri de-ale vulpii, să se determine n minim astfel încât:

a) ogarul să ajungă vulpea; și n maxim astfel

încât b) ogarul să nu ajungă vulpea.

PROBLEMA 12. Un ogar urmărește o vulpe, aflată cu N sărituri înaintea ogarului. Vulpea face de 3 ori mai multe sărituri decât ogarul dar, în același timp, lungimea săriturii ogarului este de 4 ori mai mare decât a vulpii.
Să se afle N știind că ogarul ajunge vulpea după 10 sărituri. Este posibil ca vulpea să fie ajunsă după numai 5 sărituri?

PROBLEMA 13. Două echipe de muncitori efectuează lucrări identice. A doua echipă a început lucrarea cu 30 zile mai repede. Să se afle după câte zile echipele vor ajunge în aceeași fază de execuție a lucrării, știind că productivitatea muncii în prima echipă este de două ori mai mică decât cea din echipa a doua, dar că prima echipă are de trei ori mai mulți muncitori decât a doua. (Admitem că echipele sunt omogene, adică toți muncitorii dintr-o echipă lucrează la fel).

Indicații și Răspunsuri la problemele 10-13.

Pr.10 N=? a=3, b=5, p=4, q=7, x=60

Cum $x=\dfrac{apN}{aq-bp}$, rezultă $N=\dfrac{60}{12}=5$.

Pr.11 N=15, a=3, b=7, p=2, q=n

a) Trebuie ca

$$\frac{3}{7}>\frac{2}{n} \quad \text{adică} \quad n>\frac{14}{3} \quad \text{, deci} \quad n=5 .$$

b) Trebuie ca

$$\frac{3}{7} \le \frac{2}{n} \Rightarrow \frac{14}{3} \text{ , deci } \quad n=4 \text{ .}$$

Pr.12 $\quad x=\frac{apN}{aq-bp}$; $\frac{a}{b}=\frac{1}{3}$; $\frac{p}{q}=\frac{1}{4} \Rightarrow b=3a,\ q=4p$

Rezultă $x=\frac{apN}{a4p-3ap} \Leftrightarrow x=N$, deci $N=x$

a) $N=0$; b) $N=5$.

Pr.13 $\quad N=30$, $\frac{a}{b}=\frac{1}{2}$; $\frac{p}{q}=\frac{1}{3}$

$$x=\frac{apN}{aq-bp}=\frac{apN}{ap(3-2)}=N$$

Deci după 30 zile.

BIBLIOGRAFIE

1.C.P.POPOVICI, I.C.LIGOR, V.ALEXIANU, Matematică. Aritmetică. Algebră, Manual pentru clasa a VI-a, E.D.P., Bucureşti, 1992

2.I.CRĂCIUNEL, ş.a., Matematică. Algebră, Manual pentru clasa a VIII-a, E.D.P., Bucureşti, 1993

3.ŢELINOIU,P., Culegere de exerciţii şi probleme de matematică, Editura Porto-Franco, Galaţi, 1991

4.OLIVOTTO,I., Culegere de exerciţii şi probleme de aritmetică pentru clasele V-VI, Ed.Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976.

TWO STRATEGIES FOR SOLVING " CHASE PROBLEMS "

ABSTRACT. This paper is devoted to a class of problems called " chase problems " because they are stated generally in the folowing form (see the textbooks [1] and [2]:" A greyhound follows a fox which has 60 long jumps in advance. While the greyhound jumps 6 times, the fox jumps 9 times but the length of 3 long jumps of the greehound equals the length of 7 long jumps of the fox. Can the greyhound catch up with the fox ? [2], - Problem 25).

We give two different ways for solving such problems. The first method is based on a time - space dichotomy and permits to generalize this type of problems. By means of problem 3 and its solution we encourage the reader to propose himself as much problems as he want.Finally, other two directions in generalizing this type of problems are given.

Universitatea din Baia Mare
Str.Victoriei nr.76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA