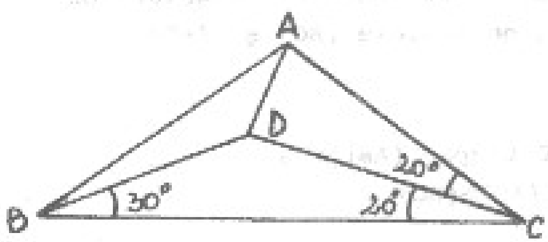
Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.3(1993-1994),43-52

REZOLVAREA UNOR PROBLEME CU UNGHIURI

Mihail RACOLŢA

În această notă voi prezenta soluţiile a cinci probleme înrudite de geometrie urmând atât o metodă geometrică cât şi una trigonometrică şi, ca o consecinţă imediată, voi prezenta apoi rezolvarea problemei 3 cu ajutorul problemei 2.

PROBLEMA 1. Fie ΔBAC un triunghi isoscel(AB)=(AC), m(BAC)=100° şi D ∈ int ΔABC astfel încât m(DBC)=30°;m(DCB)=20°.Se cere m(BAD)
(Problema C:1529,G.M.,nr.5/1994)



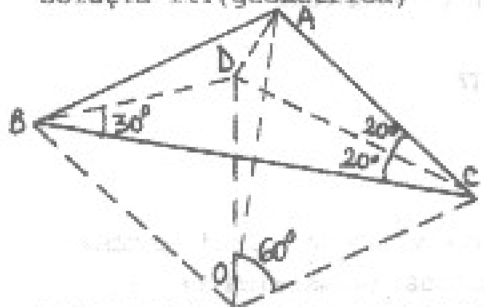
Rezolvare:
Se dă:AB=AC
m(BAC)=100°
D∈int∢BAC
m(DBC)=30°
m(DCB)=20°
Se cere:m(BAD)

Soluţia I.(trigonometrică) Din datele problemei rezultă că
m(ABC)=m(ACB)=40° şi [CD] este bisectoarea unghiului C,m(BDC)=130°.
Notăm:AB=AC=a⇒BC=2a cos40°=2a sin 50°
Aplicăm teorema sinusului în triunghiul BCD şi rezultă

$$\frac{DC}{\sin 30°} = \frac{BC}{\sin BCD} \Rightarrow \frac{DC}{\frac{1}{2}} = \frac{BC}{\sin 130°} = \frac{2a \sin 50°}{\sin 130°} = 2a \Rightarrow DC = a.$$

$\Rightarrow \Delta ACD$ este isoscel, m(ACD)=20° $\rightarrow$ m(DAC)=80° $\rightarrow$ m(BAD)=20° pentru că:
(m(BAD))=m(BAC)-m(DAC)=100°-80°=20°)

Soluţia II.(geometrică)

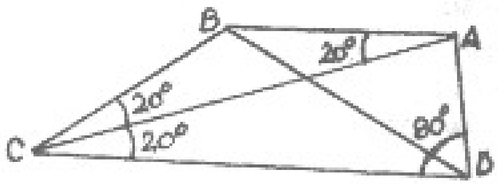


Fie O centrul cercului circumscris ΔBDC. Evident O se află pe mediatoarea segmentului (BC), COD fiind unghiul la centru $\rightarrow$ m(COD)=2.30°=60°. Cum OB=OD=OC=R$\Rightarrow\Delta$COD echilateral$\Rightarrow$ m(BCO)=60°-20°=40°. Cum ΔBOC este isoscel, OB=OC=R.

ΔBAC = ΔBOC(U.L.U) $\rightarrow$ OC = OD = CD = a = AC.
Deci ΔACD isoscel.
Cum m(ACD)=20° $\rightarrow$ m(CAD) = 80° $\rightarrow$ m(BAC)-m(DAC)=100°-80°=20°.
Deci m(BAD)=20°.

q.e.d.

PROBLEMA 2. Fie ABCD un trapez, AB, CD baza mică, respectiv baza mare (AB)=(BC), m(ACB)=20°, m(ADC)=80°. Se cere mărimea unghiurilor formate de diagonala(BD) cu laturile neparalele (BC) şi (AD).
(Problema C:918, G.M.nr 7/1989).



Deci:
Se dă: ABCD trapez.(AB||CD)
m(ACB)=20°,(AB)=(BC)
m(ADC)=80°
Se cere: m(CBD); m(ADB)

Rezolvare:

Soluţia I (trigonometrică)

AB=BC $\rightarrow$ m(ACB) = m(BAC)=(alt int) = m(ACD)=20°

Cum $m(ADB)=80° \Rightarrow m(CAD)=80° \Rightarrow AC=CD$

Notăm $AB=BC=a$. În $\Delta ABC \Rightarrow AC=2a\cos 20° = 2a\sin 70°$.

În ΔBCD aplicăm teorema cosinusului $\Rightarrow$

$$BD^2=CD^2+BC^2-2CD\cdot BC\cos 40°=4a^2\sin^2 70°+a^2-$$

$$-4a^2\sin 70°\cos 40°=4a^2\sin^2 70°+a^2-2a^2(\sin 110°+\sin 30°)=$$

$$=4a^2\sin^2 70°+a^2-2a^2\sin 70°-a^2=4a^2\sin^2 70°-2a^2\sin 70°=$$

$$=4a^2\sin 70°\left(\sin 70°-\frac{1}{2}\right)=4a^2\sin 70°(\sin 70°-\sin 30°)=$$

$$=8a^2\cos 20°\sin 20°\cos 50°=4a^2\sin^2 40° \Rightarrow BD=2a\sin 40°$$

în continuare în ΔBCD aplicăm teorema sinusului

$$\Rightarrow \frac{CD}{\sin(CBD)}=\frac{BD}{\sin 40°}=\frac{BC}{\sin(BDC)} \Rightarrow$$

(7)

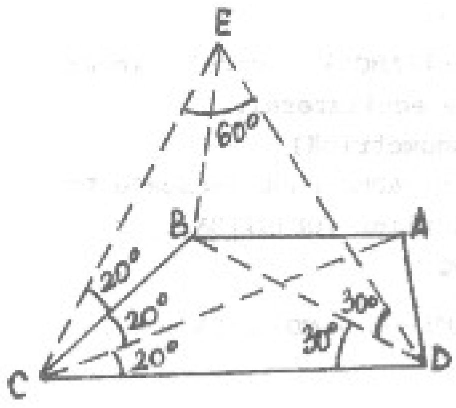
$$\frac{2a\sin 70°}{\sin(CBD)}=\frac{2a\sin 40°}{\sin 40°}=\frac{a}{\sin(BDC)} \Rightarrow \sin(BDC)=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow m(BDC)=30°$ sau $m(BDC)=150°$.

Cum $m(BDC) < m(ACD) = 80° \Rightarrow$ ca soluție

$m(BDC)=30° \Rightarrow m(CBD)=110° \Rightarrow m(ADB)=80°-30°=50°$ ceea ce trebuia să calculăm.

Soluția II (geometrică)



Fie E astfel încât

$$\left.\begin{array}{l} m(BCE)=20° \\ CE=CA=CD \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$1)\ \Delta ABC \equiv \Delta EBC\ (LUL) \left\{\begin{array}{l} AC=CE \\ CB \text{ lat.com.} \\ m(ACB)=m(ECB)=20° \end{array}\right.$$

2) ΔECD - echilateral

$$3)\ \Delta DBC \equiv \Delta EBD\ (LLL) \left\{\begin{array}{l} BD \text{ lat.com.} \\ BC=BE=a \\ CD=ED;\ \Delta ECD \text{ echil.} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$m(CDB)-m(EDB)=30° \rightarrow m(ADB)=80°-30°=50°$ *si* $m(CBD)=180°-40°-30°=110°$

Observaţie.

Rezolvarea problemei lui Eugen Rusu se poate face cu ajutorul problemei precedente.

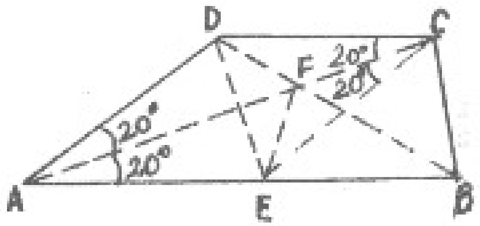
PROBLEMA 3.(Problema lui Eugen Rusu)

Într-un triunghi isoscel ΔBAC $(AB)\equiv(AC)$, $m(\hat{A})=20°$

Fie $E \in (BA)$ a.î. $m(ACE)=20°$ şi fie $F \in (AC)$ a.î. $m(ABF)=30°$.

Se cere $m(AEF)$.

Problema se găseşte în [5]



Rezolvare. Prin A şi C construim AD şi CD a.î. $m(DAC)=m(DCA)=20°$. Evident că D se află pe mediatoarea segmentului (AC) şi F pe mediatoarea segmentului (DE) $\rightarrow$ că punctele B, F, D sunt coliniare.

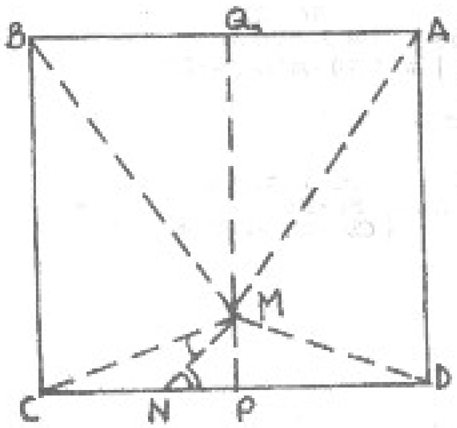
Deci (BD) este diagonala trapezului format, ABCD

$\rightarrow \left.\begin{matrix} m(BAD)=40° \\ m(ABC)=80° \end{matrix}\right\}$ Aflarea unghiului cerut

$m(AEF)=m(ADF)$ conduce la rezolvarea problemei 2.

PROBLEMA 4.Problema 4,pag.75, [3]

Se dă un pătrat ABCD şi $M \in Int(ABCD)$ astfel încât $m(MCD)=m(MDC)=15°$. Să se arate că ΔABM este echilateral.

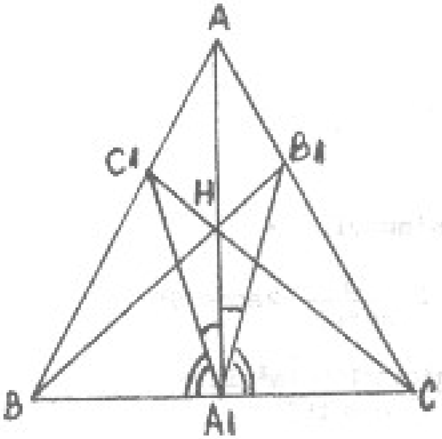


Soluţia I (trigonometrică)

Evident că ΔCMD şi ΔBMA sunt isoscele PQ mediatoarea laturilor [CD] şi [BA].

Evident că $M \in PQ$.

În $\Delta MPD (m(P)=90°) \rightarrow PD = MD \cos 15° \rightarrow$



Rezolvare.

Se dă:

ΔABC oarecare

$AA_1 \perp BC$.

$H \in (AA_1)$

$[BB_1]$, $[CC_1]$ ceviene care trec prin H

Se cere: $m(AA_1C_1)=m(AA_1B_1)$

Rezolvarea problemei presupune tratarea mai multor cazuri.

Cazul I.

Fie AB=AC sau ΔABC echilateral.

1) Evident ΔBHC este isoscel (înălţimea fiind mediană)⇒ $m(HBC)=m(HCB)$;

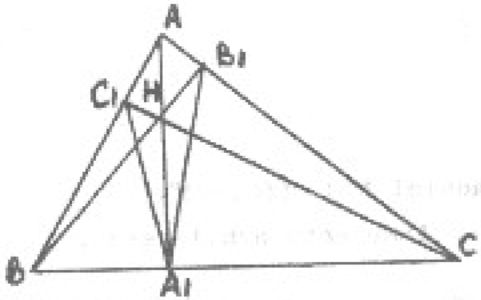
2) $\Delta BCC_1 \equiv \Delta CBB_1$(cazul U.L.U)⇒$(BB_1)\equiv(CC_1)$,$(BC_1)\equiv(CB_1)$;

3) $\Delta A_1BC_1 \equiv \Delta A_1CB_1$(L.U.L)⇒$m(BA_1C_1)=m(CA_1B_1)$, cum $m(AA_1B)=m(AA_1C)$⇒$m(AA_1C_1)=m(AA_1B_1)$ şi problema în acest caz

este rezolvată.

Cazul II. ΔABC oarecare,(nici isoscel,nici echilateral)

Aici avem două subcazuri



1) H este ortocentrul ΔABC;

2) H nu este ortocentrul ΔABC.

1) Dacă H este ortocentrul ΔABC atunci A_1H B_1C este inscriptibil $m(H\hat{A}_1C)=90°$;$m(HB_1C)=90°$deci unghiurile opuse sunt suplementare) ⇒ $m(B_1CH)=m(B_1A_1H)$ (1)

pentru că unghiul format de o latură cu diagonala unui patrulater inscriptibil este congruent cu unghiul format de latura sa opusă cu cealaltă diagonală.

C_1A_1CA este inscriptibil pentru că $m(CA_1A)=m(CC_1A.)=90°$ (2)

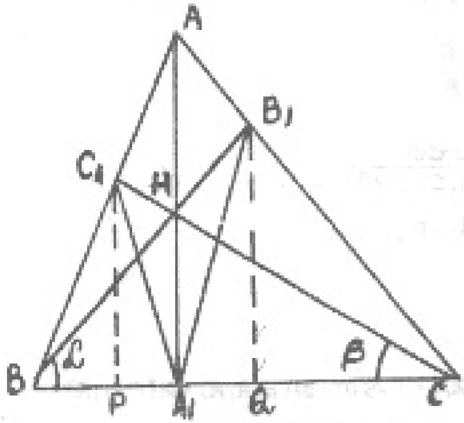
Atunci ⇒ $m(B_1CC_1)=m(AA_1C)$

Din (1) şi (2) pe baza tranzitivităţii ⇒ $m(AA_1C_1)=m(AA_1B_1)$

Deci problema este rezolvată și în acest caz.

Observație: Înălțimile unui triunghi oarecare sunt bisectoare pentru triunghiul ortic.

2) H nu este ortocentrul triunghiului.



Soluția I. Fie $C_1P \perp BC$; $B_1Q \perp BC$

$m(B_1BC)=\alpha$

$m(C_1CB)=\beta$

$A_1H=d$

În ΔBA_1H, $m(\hat{A}_1)=90°$

$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{A_1H}{BH}=\frac{d}{\sqrt{d^2+BA_1^2}}$,

$\cos\alpha=\frac{BA_1}{BH}=\frac{BA_1}{\sqrt{d^2+BA_1^2}}$, În ΔAA_1B, $m(\hat{A}_1)=90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin B=\frac{AA_1}{AB}=\frac{h}{c}$, $\cos B=\frac{BA_1}{AB}=\frac{BA_1}{C}$. În ΔCA_1H

$m(\hat{A}_1)=90° \Rightarrow \sin\beta=\frac{A_1H}{CH}=\frac{d}{\sqrt{d^2+A_1C^2}}$, $\cos\beta=\frac{A_1C}{CH}=\frac{A_1C}{\sqrt{d^2+A_1C^2}}$

În ΔAA_1C, $m(\hat{A}_1)=90° \Rightarrow \sin C=\frac{AA_1}{AC}=\frac{h}{b}$, $\cos C=\frac{A_1C}{AC}=\frac{A_1C}{b}$

$ctgC=\frac{A_1C}{h} \Rightarrow \sin(\alpha+C)=\sin\alpha\cos C+\cos\alpha\sin C=\frac{dA_1C+h\cdot BA_1}{b\sqrt{d^2+BA_1^2}}$

$\sin(\beta+B)=\sin\beta\cos B+\cos\beta\sin B=\frac{d\cdot A_1B+h\cdot A_1C}{C\cdot\sqrt{d^2+A_1c^2}}$

$ctgB=\frac{A_1B}{h}$

În $\Delta BB_1C \Rightarrow B_1Q=\frac{2}{BC}\cdot S_{BB_1C}=\frac{2}{a}\cdot\frac{A^2\sin\alpha\sin C}{2\sin(\alpha+C)}=\frac{ad\cdot h}{d\cdot A_1C-h\cdot BA_1}$

În ΔB_1QC $m(\hat{Q})=90^\circ \Rightarrow QC=B_1Q\ ctgC=\frac{a\cdot d\cdot A_1C}{d\cdot A_1C+hBA_1}$

$$\Rightarrow A_1Q=A_1C-QC=A_1C-\frac{a\cdot d\cdot A_1C}{d\cdot A_1C+h\cdot BA_1}=\frac{A_1C(d\cdot A_1C+h\cdot A_1B-ad)}{d\cdot A_1C+h\cdot A_1B}=$$

$$=\frac{A_1C[dA_1C+h\cdot A_1B-(BA_1+A_1C)\cdot d]}{d\cdot A_1C+h\cdot A_1B}=\frac{A_1B\cdot A_1C(h-d)}{d\cdot A_1C+h\cdot A_1B}$$

În ΔA_1QB_1, $m(\hat{Q})=90^\circ \Rightarrow tg(B_1A_1Q)=\frac{B_1Q}{A_1Q}=\frac{a\cdot d\cdot h}{A_1B\cdot A_1C(h-d)}$

Urmând același raționament se arată că în

ΔA_1PC_1, $m(P)=90^\circ$ $tgC_1A_1P=\frac{a\cdot d\cdot h}{A_1B\cdot A_1C(h-d)}$

Cum amândouă unghiurile sunt ascuțite $\Rightarrow$

$\Rightarrow m(C_1A_1P)=m(B_1A_1Q)$ și cum $m(AA_1B)=m(AA_1C)=90^\circ \Rightarrow m(B_1A_1A)=m(C_1A_1A)$

q.e.d. Deci problema este rezolvată în toate cazurile.

Soluția II.

Notăm: $BP=x$

$QC=y$

$C_1P=u$

$B_1Q=v$

$A_1H=d$

Avem ΔC_1PC și ΔHA_1C (dreptunghic și are un unghi ascuțit comun).

$\Rightarrow \frac{C_1P}{A_1H}=\frac{PC}{A_1C}\Rightarrow \frac{u}{d}=\frac{a-x}{A_1C}\Rightarrow d\cdot x+A_1C\cdot u=a\cdot d.$ (1)

Evident că $\Delta AA_1B \sim \Delta C_1PB$ (dreptunghice și au un unghi ascuțit comun)

$\Rightarrow \frac{AA_1}{C_1P}=\frac{BA_1}{BP}\Rightarrow \frac{h}{u}=\frac{BA_1}{x}\Rightarrow hx-A_1B\cdot u=0$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{a\cdot d\ A_1B}{d\ A_1B+h\cdot A_1C} \\ u=\frac{a\cdot d\ h}{d\cdot A_1B+h\cdot A_1C} \end{cases}$

$$\Rightarrow A_1P = A_1B - BP = A_1B - \frac{a \cdot d\ A_1B}{d \cdot A_1B + h \cdot A_1C} =$$

$$= \frac{A_1B[d \cdot A_1B + h \cdot A_1C - (A_1B + A_1C)\ d\ ]}{d \cdot A_1B + h \cdot A_1C} = \frac{A_1B \cdot A_1C(h-d)}{d \cdot A_1B + h \cdot A_1C}$$

În ΔA_1PC_1 $(m(\hat{P}) = 90° \Rightarrow tg\ C_1A_1P = \frac{C_1P}{PA_1} = \frac{a \cdot d\ h}{A_1B \cdot A_1C(h-d)}$

Analog folosind acelaşi raţionament $\Rightarrow$

În $\Delta A_1QB_1 \Rightarrow tg(B_1A_1Q) = \frac{a \cdot d\ h}{A_1B \cdot A_1C(h-d)}$

Cum cele două unghiuri sunt ascuţite $\Rightarrow m(C_1A_1P) = m(B_1A_1Q)$ şi

cum $m(AA_1B) = m(AA_1C) = 90° \Rightarrow m(C_1A_1H) = m(HA_1B_1)$

q.e.d.

BIBLIOGRAFIE

1. M.STOKA, şi colectiv, Culegere de probleme de trigonometrie, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966.
2. C.I.ŢIU, Aplicaţii în trigonometrie, Editura Didactică şi Pedagogică, 1992.
3. A.COŢA, şi colectiv, Geometrie şi trigonometrie, Manual pentru clasa a IX-a, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1986
4. x x x , Gazeta matematică, seria B, 1980 - 1994.
5. C.I.ŢIU, Geometrie plană şi în spaţiu pentru admitere în facultate, Editura Albatros, Bucureşti, 1976.

SOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES À ANGLES

RÉSUMÉ.Cet ouvrage naquit de mon intérêt en tand que professeur de mathématiques au Lycée "Vasile Lucaciu " Baia Mare.

À la suite d'une conférence où l'on a présenté des exposés,je me suis résolu conseillé et soutenu par Monsieur le maitre de conférence, docteur en mathématiques Berinde Vasile, de faire paraître la présentation et la résolution ce cinq problèmes de geometrie elementaire apparentes, à angles, problème avec un grand degrès de difficulté.

Les problèmes proviennent de " Gazeta matematică ", des recueils de problèmes ainsi que de nos livres de classe.

Je me suis éventué à assures à cet ouvrage une indépendance maximale vis-à-vis d'autres ouvrages de geometrie.

Dans la résolution des problèmes presentés j'ai donné des solution trigonométriques et géometriques.

Je remerçie Monsieur le maitre de conférence docteur en mathématique Berinde Vasile qui vu a soutenu et encouragé,ne fut-ce que par une lecture attentive et patiente de mon ouvrage

Liceul " Vasile Lucaciu " Baia Mare
Str. Culturii nr,2 4800 Baia Mare
ROMÂNIA