Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.3(1993-1994),53-60

ASUPRA UNOR RECURENȚE SUBCONVEXE

Dan BĂRBOSU

1. Introducere

Problema 365 din [3],pag 48 are enunțul:

" *Arătați că orice șir de numere reale nenegative* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *care satisface relația* $2x_{n+2}\le x_{n+1}+x_n$ $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$ *este convergent.*"

Scriind relația enunțului în forma:

(1.1) $x_{n+2}\le \frac{1}{2}x_{n+1}+\frac{1}{2}x_n,\quad (\forall)\, n\in\mathbb{N}$

constatăm că fiecare din termenii șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ începând cu termenul de rang doi este cel mult egal cu o combinație convexă a doi termeni precedenți ai șirului .

Suntem conduși la cercetarea convergenței șirurilor de numere reale nenegative $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ce satisfac relații de forma:

(1.2) $x_{n+2}\le \alpha_1 x_{n+1}+\alpha_2 x_n,\ (\forall)\, n\in\mathbb{N}$

unde:

(1.3) $\alpha_1\alpha_2\in(0,1),\ \ \alpha_1+\alpha_2\le 1$

În cazul în care (1.3) are loc egalitatea, membrul drept al relației (1.2) constituie o combinație convexă a termenilor de ranguri n și (n+1) ai șirului considerat.

Generalizăm considerațiile precedente în forma precizată în:

1.1.Definiție. *Fie* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un șir de numere reale nenegative iar* $p\in\mathbb{N}^*$

fixat. Spunem că şirul $(x_n)_{n\in N}$ este subconvex de ordinul p dacă sunt îndeplinite condiţiile:

(1.4) $x_{n+p} \le \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x_{n+p-k}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$

unde:

(1.5) $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k \le 1$, $\alpha_k \in (0,1)$ $(\forall) k \in \{1,2,...,p\}$

1.2.Exemplu:În definţia 1.1 particularizăm p=1. Vom spune deci că şirul de numere reale nenegative $(x_n)_{n\in N}$ este subconvex de ordinul întâi dacă există $\alpha_1 \in (0,1)$ cu proprietatea:

(1.6) $x_{n+1} \le \alpha_1 x_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$

Este evident că orice şir subconvex de ordinul întâi este convergent şi are limita $l_1 = \lim_{n\to\infty} x_n = 0$

2.Convergenţa şirurilor subconvexe de ordinul doi.

Dacă în definiţia 1.1 particularizăm p=2, obţinem:

2.1.Definiţie:*Şirul de numere reale nenegative* $(x_n)_{n\in N}$ *se numeşte subconvex de ordinul doi dacă există* $\alpha_1, \alpha_2 \in (0,1)$, $\alpha_1 + \alpha_2 \le 1$ *astfel încât să aibă loc relaţia:*

(2.1) $x_{n+2} \le \alpha_1 x_{n+1} + \alpha_2 x_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$

Privitor la un şir subconvex de ordinul doi are loc:

2.2.TEOREMĂ [1]:Orice şir subconvex de ordinul doi este convergent.

Demonstraţie:

Definim şirul $(y_n)_{n\in N}$ prin:

(2.2) $y_{n+1} = x_{n+1} + (1-\alpha_1) x_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}$

Datorită nenegativităţii termenilor şirului $(x_n)_{n\in N}$ şi a faptului că $\alpha_1 \in (0,1)$ din relaţia de definiţie a şirului $(y_n)_{n\in N^*}$ rezultă că are loc relaţia:

(2.3) $y_n \ge 0$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$

Vom demonstra că şirul $(y_n)_{n\in N^*}$ este descrescător. Avem:

$$y_{n+2}=x_{n+2}+(1-\alpha_1)x_{n+1}\le\alpha_1x_{n+1}+\alpha_2x_n+(1-\alpha_1)x_{n+1}=$$

$$=x_{n+1}+\alpha_2x_n\le x_{n+1}+(1-\alpha_1)x_n=y_{n+1},\quad(\forall)n\in N$$

prin urmare afirmaţia " şirul $(y_n)_{n\in N}$ este descrescător" este adevărată.

Din cele de mai sus rezultă că şirul $(y_n)_{n\in N^*}$ este convergent, deci există $l\in\mathbb{R}$, $l=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

Ţinând cont de definiţia(2.2)a şirului $(y_n)_{n\in N}$ deducem că $(\forall)\varepsilon>0$ există un rang $N=N(\varepsilon)$ astfel încât să fie verificate inegalităţile:

(2.4) $l-\varepsilon-(1-\alpha_1)x_n\le x_{n+1}\le l+\varepsilon-(1-\alpha_1)x_n,\quad(\forall)n\ge N$

Folosind (2.4) vom demonstra că şirul $(x_n)_{n\in N}$ este convergent şi vom determina $l_1=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ în funcţie de l. În scopul propus, fie $m\in N^*$; aplicând succesiv inegalităţile (2.4) obţinem:

$$x_{N+m+1}\le l+\varepsilon-(1-\alpha_1)x_{N+m}\le l+\varepsilon+(1-\alpha_1)[-(l-\varepsilon)+(1-\alpha_1)x_{N+m-1}]=$$

$$=l[1-(1-\alpha_1)]+\varepsilon[1+(1-\alpha_1)]+(1-\alpha_1)^2x_{N+m-1}\le$$

$$\le l[1-(1-\alpha_1)]+\varepsilon[1+(1-\alpha_1)]+(1-\alpha_1)^2[l+\varepsilon-(1-\alpha_1)x_{N+m-2}]=$$

$$=l[1-(1-\alpha_1)+(1-\alpha_1)^2]+\varepsilon[1+(1-\alpha_1)+(1-\alpha_1)^2]-(1-\alpha)^3x_{N+m-2}\le\ldots$$

$$\ldots\le l[1-(1-\alpha_1)+(1-\alpha_1)^2-\ldots+(-1)^m(1-\alpha_1)^m]+\varepsilon[1+(1-\alpha_1)+\ldots+(1-\alpha_1)^m]+$$

$$+(-1)^{m+1}\cdot(1-\alpha_1)^{m+1}x_N=$$

$$=l\cdot\frac{1-(-1)^{m+1}(1-\alpha_1)^{m+1}}{2-\alpha_1}+\varepsilon\cdot\frac{1-(1-\alpha_1)^{m+1}}{\alpha_1}+(-1)^{m+1}\cdot(1-\alpha_1)^{m+1}x_N$$

Ţinând seama că $\lim\limits_{m\to\infty}|(-1)^{m+1}(1-\alpha_1)^{m+1}|=0$, inegalitatea poate fi scrisă sub forma:

(2.5) $x_{N+m+1} \le \frac{l}{2-\alpha_1} + \frac{\epsilon}{\alpha_1} + (-1)^{m+1}\cdot(1-\alpha_1)^{m+1}x_N \quad (\forall)\, m\in\mathbb{N}^*$

Analog se demontrează inegalitatea:

(2.6) $x_{N+m+1} \ge \frac{l}{2-\alpha_1} - \frac{\epsilon}{\alpha_1} + (-1)^{m+1}(1-\alpha_1)^{m+1}x_N \quad (\forall)\, m\in\mathbb{N}^*$

Faptul că $\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^{n+1}(1-\alpha_1)^{n+1}|=0$ atrage după sine faptul că $(\forall)\,\epsilon_1>0$ există un număr natural $m_0=m(\epsilon_1)$ astfel încât avem:

(2.7) $|(-1)^{m+1}(1-\alpha_1)^{m+1}|x_N<\epsilon_1 \quad (\forall)\, m \ge m_0,\ m\in\mathbb{N}^*$

Inegalitățile(2.5),(2.6)(2.7) conduc la:

(2.8) $-\epsilon_2=-\frac{\epsilon}{\alpha_1}-\epsilon_1 < x_{N+m+1}-\frac{l}{2-\alpha_1} < \frac{\epsilon}{\alpha_1}+\epsilon_1=\epsilon_2 \quad (\forall)\, m\ge m_0$

Relațiile (2.8) arată că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent și are limita $l_1=\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{l}{2-\alpha_1}$

2.3.Exemple

i)Fie $a\in\mathbb{R}_+$.Șirul constant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n=a\ (\forall)\, n\in\mathbb{N}$ este subconvex de ordinul doi în sensul definiției 2.1.El este evident convergent și are limita $l_1=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.În acest caz, șirul auxiliar $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ utilizat în demonstrația teoremei 2.2. are termenul general $y_n=(2-\alpha_1)a$, *deci* $l=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=(2-\alpha_1)a$ .Conform rezultatului stabilit în teorema 2.2, regăsim $l_1=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\frac{l}{2-\alpha_1}=a$.

ii)Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de termeni general $x_n=\frac{1}{n},\ (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$ căci:

$$x_{n+2}=\frac{1}{n+2}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{2}x_{n+1}+\frac{1}{2}x_n, \quad (\forall)\, n\in\mathbb{N}$$

adică relația(2.1)este verificată cu $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{2}$ .Evident $l_1=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

Șirul auxiliar $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ are în acest caz termenul general

$y_{n+1}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2n}, (\forall) n\in\mathbb{N}^*$ şi limita $l=\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$ .Aplicând rezultatul stabilit în teorema 2.2, regăsim $l_1=\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{2}{3}l=0$

3.Convergenţa şirurilor subconvexe de ordinul p.

În acest paragraf se va stabili o condiţie suficientă ca un şir convergent subconvex de orinul p în sensul definiţiei 1.1 să fie convergent.

Un rezultat auxiliar este exprimat în:

3.1 Lemă: Dacă $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir subconvex de ordinul p, atunci şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de termen general:

(3.1) $y_n=x_{n+p-1}+(1-\alpha_1)x_{n+p-2}+...+(1-\alpha_1-\alpha_2)x_n$

este convergent.

Demonstraţie:

Datorită nenegativităţii termenilor şirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi a coeficienţilor membrului drept al relaţiei (3.1)rezultă că $y_n\geq 0$, $(\forall) n\in\mathbb{N}$, adică şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit inferior.

În plus, aplicând relaţiile (3.1),(1.4) şi (1.5) deducem:

$$y_{n+1}=x_{n+p}+(1-\alpha_1)x_{n+p-1}+...+(1-\alpha_1-\alpha_2-...-\alpha_{p-1})x_{n+1}\leq$$

$$\leq\alpha_1 x_{n+p-1}+\alpha_2 x_{n+p-1}+...+\alpha_{p+1}x_{n+1}+\alpha_p x_n+$$

$$+(1-\alpha_1)x_{n+p-1}+(1-\alpha_1-\alpha_2)x_{n+p-2}+...+(1-\alpha_1-...-\alpha_{p-1})x_{n+1}+\alpha_p x_n=$$

$$=x_{n+p-1}+(1-\alpha_1)x_{n+p-2}+...+(1-\alpha_1-...-\alpha_{p-2})x_{n+1}+\alpha_p x_n\leq$$

$$\leq x_{n+p-1}+(1-\alpha_1)x_{n+p-2}+...+(1-\alpha_1-...-\alpha_{p-2})x_{n+1}+(1-\alpha_1-...-\alpha_{p-1})x_n=y_n$$

deci şirul $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este descrescător.Fiind descrescător şi mărginit inferior $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi lema este demonstrată.

3.2.Observaţii.

i) O întrebare firească ce se pune este dacă din convergenţa şirului (3.1) rezultă sau nu că şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

ii)În general, un şir subconvex de ordin $p>2$ nu este convergent. În sprijinul afirmaţiei precedente, să considerăm şirul $(x_n)_{n\in N}$ de termen general $x_n=n$. Este evident (printr-un calcul elementar) că:

$$x_{n+3}\le \frac{1}{2}x_{n+2}+\frac{1}{3}x_{n+1}+\frac{5}{6}x_n,\ (\forall)\, n\in\mathbb{N}, n\ge 3$$

deci şirul $(x_n)_{n\in N}$ este subconvex de ordinul trei în sensul definiţiei1.1.Pe de altă parte este clar că $\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty$, *deci* $(x_n)_{n\in N}$ este divergent.

iii)Şirul de termen general $x_n=a\,(a>0)$ este subconvex de ordin p căci:

$x_{n+p}\le \frac{1}{p}(x_{n+p-1}+x_{n+p-2}+\ldots+x_n)$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$ şi evident $(x_n)_{n\in N}$ este convergent având limita $\lim_{n\to\infty} x_n=a$.

Se pune problema stabilirii unei condiţii suficiente ca un şir subconvex de ordin $p(p>2)$ să fie convergent.

În [5],D.Mihet şi M.Piticari au stabilit rezultatul exprimat în:

3.3.TEOREMĂ:*Fie* $a_1,a_2,\ldots,a_p\in\mathbb{R}$ *iar* $(x_n)_{n\ge p}$ *un şir de numere reale cu proprietatea ca şirul* $(y_n)_{n\ge 0}$ *de termen general:*

(3.2) $y_n=x_{n+p-1}+a_1x_{n+p-2}+\ldots+a_px_n$

este convergent.Dacă ecuaţia:

(3.3) $x^p+a_1x^{p-1}+\ldots+a_{p-1}x+a_p=0$

are rădăcinile de modul subunitar,atunci şirul $(x_n)_{n\ge p}$ este convergent.

Folosind rezultatul exprimat în teorema 3.3, are loc:

3.4.TEOREMĂ: *Fie pe* $\mathbb{N}$ *iar* $(x_n)_{n\in N}$ *un şir subconvex de ordinul p.Sunt adevărate afirmaţiile de mai jos:*

i) Dacă $p\in\{1,2\}$,atunci şirul $(x_n)_{n\in N}$ este convergent.

ii)Dacă $p\ge 3$ şi ecuaţia:

$$x^p+(1-\alpha_1)x^{p-1}+(1-\alpha_1-\alpha_2)x^{p-2}+\ldots+(1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{p-2})x+(1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{p-1})=0 \qquad (3.4)$$

are toate rădăcinile de modul subunitar, atunci şirul $(x_n)_{n\in N}$ este convergent.

Demonstrație

i) Dacă $p=1$, atunci conform exemplului 1.2 șirul $(x_n)_{n\in N}$ este convergent și $\lim_{n\to\infty} x_n=0$. Dacă $p=2$, atunci conform teoremei 2.2 șirul $(x_n)_{n\in N}$ este convergent.

ii) Considerăm șirul $(y_n)_{n\in N}$ de termen general (3.1). Conform lemei 3.1 el este convergent. Aplicând teorema 3.3 rezultă că șirul $(x_n)_{n\in N}$ este convergent și teorema este complet demonstrată.

3.5. Observații.

i) Teorema 3.4 nu admite o demonstrație similară cu cea a demonstrației teoremei 2.2.

ii) Faptul că există șiruri subconvexe de ordin $p\geq 2$ divergente este sugerat de faptul că, în general, radăcinile ecuației (3.4) au modulul mai mic decât 2 (vezi [6]) și nu mai mic decât 1.

iii) În ipoteza (3.4) notând $l=\lim_{n\to\infty} y_n$, $l_1=\lim_{n\to\infty} x_n$ are loc egalitatea.

$$(3.5)\quad l_1=\frac{l}{1+(1-\alpha_1)+(1-\alpha_1-\alpha_2)+\ldots+(1-\alpha_1-\ldots-\alpha_{p-1})}$$

care permite exprimarea limitei șirului $(x_n)_{n\in N}$ în funcție de limita șirului auxiliar (3.1).

O consecință directă a teoremei 3.4 este exprimată în:

3.6. COROLAR: *Fie $p\in N^*$ iar $(x_n)_{n\in N}$ un șir de numere reale supraunitare cu proprietatea că $(\exists)\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p\in(0,1)$, $\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\leq 1$ astfel încât să aibă loc inegalitatea:*

$$(3.6)\qquad z_{n+p}\leq z_{n+p-1}^{\alpha_1} z_{n+p-2}^{\alpha_2}\ldots z_n^{\alpha_p}$$

Sunt adevărate afirmațiile de mai jos:

i) Dacă $p\in\{1,2\}$, atunci șirul $(z_n)_{n\in N}$ este convergent.

ii) Dacă $p\geq 3$ și ecuația (3.4) are toate rădăcinile de modul subunitar, atunci șirul $(z_n)_{n\in N}$ este convergent.

Demonstrație: Șirul $(x_n)_{n\in N}$, $x_n=\ln z_n$ este subconvex de ordin p și se aplică teorema 3.5.

3.7. Aplicație [2]: Arătați că orice șir $(z_n)_{n\in N}$ de numere reale supraunitare ce verifică relația:

$$z_{n+2} \leq \sqrt{z_{n+1} z_n} \quad (\forall) n \in \mathbb{N}$$

este convergent

Soluţie. Se aplică corolarul 3.6 cu $p=2$ $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{2}$

În final, ţin să exprim mulţumiri colegului *dr. Vasile Berinde* pentru observaţiile făcute pe parcursul elaborării prezentei note, care au contribuit la îmbunătăţirea ei.

BIBLIOGRAFIE

1. BALOG, L., BĂRBOSU, D., -Asupra unui şir recurent (to appear in R.M.T. nr.2-3, Zalău.)
2. BĂRBOSU, D., Problemă dată la concursul de matematică " Grigore Moisil", Baia Mare, 1994.
3. BĂTINEŢU, D.M., ş.a -Analiză matematică. Exerciţii şi probleme, Editura militară, Bucureşti 1992.
4. FORGA, C., Calculul limitelor unor şiruri definite prin relaţii de recurenţă, R.M.T., 1-2(1989), 39-42.
5. MIHEŢ, D., PITICARI, M., -O problemă de convergenţă, G.M(metodică) nr.1(1990), pag.30-31.
6. SCHWARZ, D., -Problemă dată la etapa naţională a O.M. 1975.

ON SOME SUBCONVEX RECCURENCES

ABSTRACT: Let be $p \in \mathbb{N}^*$ an arbitrary positive integer.
The notion of " subconvex sequence" of order p is given at 1.1. The fact that every subconvex sequence of order 2 is convergent is proved in Theorem 2.2. In Theorem 3.4 are given suficient conditions for the convergence of a subconvex sequence of order p.

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr.76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA