Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.3(1993-1994),61-66

ASUPRA UNEI PROBLEME A LUI TIBERIU POPOVICIU

Teodor LUCUŞ

Cu mulţi ani in urmă marele nostru matematician şi profesor de matematică Tiberiu Popoviciu propunea o problemă în " Gazeta matematică", care a rămas fără rezolvare din partea colaboratorilor.

Acest matematician, un om neliniştit şi veşnic nemulţumit, o viaţă intreagă a căutat să facă matematică cu care să imbogăţească patrimoniul naţional, un continuu izvor pentru urmaşi.

Aşa, in anul 1944 în " Gazeta matematică" vol.50, pagina 207, cu numărul 6059 apărea o problemă cu următorul enunţ:

Să se găsească trei polinoame f,g,h de x astfel incât să avem

(1) $f=g'\cdot g''$; $g=h'\cdot h''$; $h=f'\cdot f''$,

accentele insemnând derivare.

Soluţia acestei probleme am primit-o de la regretatul profesor la cursul de analiză matematică de la Facultatea de matematică-mecanică din Cluj-Napoca.

Voi da în această lucrare soluţia profesorului.

Un polinom φ în x este o funcţie de forma:

$$\varphi=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$$

unde constantele $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ sunt coeficienţii polinomului, iar numărul n întreg nenegativ este gradul acestui polinom.

În cele ce urmează vom presupune că $a_0 \neq 0$, deci că gradul unui polinom este efectiv. Derivata φ' a unui polinom φ de gradul n se calculează după regulile cunoscute şi este un polinom de gradul $n-1$. Derivata φ'' şi derivata φ''' a lui φ sunt polinoame respectiv de gradele $n-2$, $n-3$ şi în general, derivata $\varphi^{(k)}$ de ordinul $k (k \leq n)$ este un polinom de gradul $n-k$. În particular derivata $\varphi^{(n)}$ de ordinul n este constantă $(-n! a_0)$ diferită de zero şi toate derivatele de ordin $0>n$ ale lui φ sunt identic nule.

Să revenim acum la problema propusă spre rezolvare. Să notăm cu p,q,r gradele celor trei polinoame f,g şi h. Dacă ţinem seama de cele spuse mai sus şi de faptul că gradul produsului a două polinoame este egal cu suma gradelor factorilor, din condiţiile (1) rezultă că:

$p=2q-3,\ q=2r-3,\ r=2p-3$.

Rezolvând acest sistem găsim $p = q = r = 3$, deci toate cele trei polinoame căutate f,g,h sunt de gradul 3. Derivatele f',g',h' ale acestor polinoame sunt de forma

(2) $f'(x)=\lambda_1\cdot(x-a)^2+\mu_1;\ g'(x)=\lambda_2(x-b)^2+\mu_2; h'(x)=\lambda_3(x-c)^2+\mu_3$

unde $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,a,b,c,\mu_1,\mu_2,\mu_3$ sunt constante, primele trei fiind diferite de zero. Derivând polinoamele (2) deducem

(3) $f''(x)=2\lambda_1(x-a),\ g''(x)=2\lambda_2(x-b),\ h''(x)=2\lambda_3(x-c)$

Dacă derivăm relaţiile(1) de două ori şi ţinem seama de faptul că derivatele de ordin patru ale polinoamelor f,g,h sunt nule deducem:

(4) $f'=g''^2+g'\cdot g''',\ g'=h''^2+h'\cdot h''',\ h'=f''^2+f'\cdot f'''$

(5) $f''=3g''g''',\ g''=3h''h''',\ h''=3f''\cdot f'''$

Dacă ţinem seama de (2) şi (3), egalităţile (5) devin:

$2\lambda_1(x-a)=3\cdot 2\lambda_2(x-b)\cdot 2\lambda_2$

$2\lambda_2(x-b)=3\cdot 2\lambda_3(x-c)\cdot 2\lambda_3$

$2\lambda_3(x-c)=3\cdot 2\lambda_1(x-a)\cdot 2\lambda_1$

care se transformă în:

$\lambda_1(x-a)=6\lambda_2^2(x-b)$

$\lambda_2(x-b)=6\lambda_3^2(x-c)$

$\lambda_3(x-c)=6\lambda_1^2(x-a)$

de unde prin identificare in fiecare relație rezultă:

(6) $\lambda_1=6\lambda_2^2;\lambda_2=6\lambda_3^2;\lambda_3=6\lambda_1^2$

și punând în fiecare relație de mai sus pe x=a, x=b, x=c, rezultă

$0=6\lambda_2^2(a-b)$; $0=6\lambda_3^2\ (b-c)$; $0=6\lambda_1^2(c-a)$

Cum $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\neq 0$ prin ipoteză, rezultă că a-b=0 și b-c=0 de unde ne rezultă că a=b=c.

Din sistemul (6) prin eliminarea lui λ_2 și λ_3 între cele 3 relații rezultă $6^7\cdot\lambda_1^7=1$, de unde $\lambda_1=\frac{\varepsilon}{6}$ unde ε este o rădăcină a ecuației binomiale x^7-1. Înlocuind valoarea găsită a lui λ_1 in ultimele două ecuații(6) găsim:

$\lambda_2=\frac{\varepsilon^4}{6}$ *si* $\lambda_3=\frac{\varepsilon^2}{6}$

$$\left(\begin{array}{l}\lambda_3=6\cdot\frac{\varepsilon^2}{6^2}=\frac{\varepsilon^2}{6}\\ \lambda_2=6\cdot\frac{\varepsilon^4}{36}=\frac{\varepsilon^4}{6}\end{array}\right)$$

Pentru a găsi coeficienții μ_1,μ_2,μ_3 ținem seama de aceste rezultate și din (4), după simplificările cuvenite deducem:

(7) $\mu_1=2\lambda_2\mu_2,\ \mu_2=2\lambda_3\cdot\mu_3,\ \mu_3=2\lambda_1\cdot\mu_1$

Dar din (6) deducem $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\frac{1}{6^3}$ și inmulțind membru cu membru egalitățile (7) deducem $\mu_1\cdot\mu_2\cdot\mu_3=\frac{1}{27}\cdot\mu_1\mu_2\mu_3$

Această egalitate nu poate avea loc decât dacă avem $\mu_1=\mu_2=\mu_3=0$

Ţinând seama de (1),(2) şi (3) găsim soluţia generală a problemei propuse:

$$f=\frac{\varepsilon}{18}(x-a)^3,\ g=\frac{\varepsilon^4}{18}(x-a)^3,\ h=\frac{\varepsilon^2(x-a)^3}{18}$$

unde ε este o rădăcină oarecare a ecuaţiei $x^7=1$ şi a este o constantă oarecare.

O soluţie particulară se obţine pentru $\varepsilon=1$. Atunci cele trei polinoame f,g,h sunt egale.

Observaţia 1.

Dacă considerăm şi constanta 0 printre polinoame, problema are şi soluţia banală $f=g=h=0$.

Această soluţie scapă analizei de mai sus deoarece polinomul identic nul nu are un grad (efectiv) bine determinat.

Observaţia 2.

Se pot încerca diverse generalizări ale acestei probleme.O astfel de generalizare ar consta în căutarea a trei polinoame f,g,h astfel încât să avem:

$$f=g'\cdot g''\ldots g^{(k)},\ g=h'\cdot h''\ldots h^{(k)},\ h=f'\cdot f''\ldots f^{(k)},$$

unde k este un număr natural dat.Ca un prim pas în rezolvarea ei demonstrăm că numărul k nu poate fi egal decât cu 2 sau cu 3.

Folosind relaţiile de mai sus obţinem relaţiile pentru grade:

$$p=(q-1)+(q-2)+\ldots+(q-k)=\frac{(2q-k-1)k}{2}$$

$$q=(r-1)+(r-2)+\ldots+(r-k)=\frac{(2r-k-1)1}{2}$$

$$r=(p-1)+(p-2)+\ldots+(p-k)=\frac{(2p-k-1)k}{2}$$

Prin împărţiri repetate se obţin relaţiile

$$\frac{p}{q}=\frac{2q-k-1}{2r-k-1}$$

$$\frac{p}{r}=\frac{2q-k-1}{2p-k-1}$$

$$\frac{q}{r}=\frac{2r-k-1}{2p-k-1}$$

După mai multe înlocuiri vom obţine

$2q=2qk^3-k^4-2k^3-2k^2-k$ din care rezultă

$k(k^3+1)+2k^2(k+1)=2q(k^3-1)$

$k(k+1)(k^2-k+1+2k)=2q(k-1)(k^2+k+1)$

$$q=\frac{k(k+1)}{2(k-1)}\in N$$

$$2q=\frac{k^2+k}{k-1}$$

$2q=k+2+\dfrac{2}{k-1}\in N$ $\quad k-1=1 \rightarrow k=2$ *sau*

$\qquad k-1=2 \rightarrow k=3$

Deci generalizarea conduce la

$f=g'\cdot g''\cdot g'''$, $g=h'\cdot h''\cdot h'''$, $h=f'\cdot f''\cdot f'''$

grad f = p, grad g = q, grad h = r, de unde obţinem

$p=3q-6$

$q=3r-6$ care se rezolvă şi rezultă p=q=r=3

$r=3p-6$

Deci $f=\lambda_1(x-a)^3+\mu_1$, $g=\lambda_2(x-b)^3+\mu_2$, *si* $h=\lambda_3(x-c)^3+\mu_3$

Prin identificare şi derivări succesive se obţin apoi funcţiile cerute.

SUR UN PROBLÈME DE TIBERIU POPOVICIU

RÉSUMÉ. Le but de ce travail est de présenté une solution d'une problème paru en 1944, dans " Gazeta Matematică ", volume 50, page 207, nr. 605 sous l'énoncé:

Trouvez trois polinômes f,g h de variable x, de sorte qu'on ait:

(1) $f=g'\cdot g''$; $g=h'\cdot h''$; $h=f'\cdot f''$,le problème, restée q sans solution, fut ultérieurement présenté à un cours d'analyse mathématique de la Faculté de mathematique et mécanique de Cluj Napoca, II e année, commenté et généralisé par le professeur Tiberiu Popoviciu.

Liceul " Vasile Lucaciu" Baia Mare
Str. Culturii, nr.2
4800 Baia Mare
ROMÂNIA