Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.3(1993-1994),67-70

O NOUĂ GENERALIZARE A UNEI PROBLEME A LUI A.G.IOACHIMESCU

" Omagiu Gazetei Matematice, regină a publicisticii româneşti"

Dumitru ACU

I.La 15 septembrie 1895 apărea la Bucureşi primul număr al Gazetei matematice, care conţinea 13 probleme propuse.
Peste o lună, la 15 octombrie 1895, apărea cel de-al doilea număr cu 10 probleme propuse.În acest număr problema 16 era propusă de A.G.Ioachimescu, fondator şi stâlp al Gazetei Matematice, şi avea următorul enunţ:
Fie

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}.$$

Să se arate:
1) Că S_n este negativ şi creşte în valoarea absolută, când n creşte;
2) Dacă n tinde către infinit S_n tinde către o limită finită cuprinsă între -2 şi -1.

În Gazeta Matematică nr.9, pag.194 şi 195, I.Stroescu din Bucureşti prezintă o soluţie elegantă care se găseşte reprodusă pe scurt în [1].
Problema este reprodusă în majoritatea culegerilor de analiză şi algebră.
Este suficient să le reamintim pe cele mai recente:[3]-[7].
În [6] şi [7] se prezintă un rezultant mai general, demonstrându-se că dintre toate şirurile (b_n) definite prin

$$(2)\quad b_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-\lambda\sqrt{n},\ n\geq 1,\ cu\ \lambda\in\mathbb{R}$$

unul singur este convergent, cel cu $\lambda=2$, adică şirul (S_n).
În [2] se consideră şirurile $(b_n)_{n\geq 1}$ definite prin

$$(3)\quad c_n=1+\frac{1}{\sqrt[p]{2^{p-1}}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[p]{n^{p-1}}}-\lambda\sqrt[p]{n},\ n\geq 1,\ \lambda\in\mathbb{R}$$

$p\in\mathbb{R}^*, p\geq 2$ un număr dat.

Şirul (3) este convergent numai dacă $\lambda=p$.

Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu primul termen $a_1>0$ şi raţia $r>0$; în [1] definim şirul $(d_n)_{n\geq 1}$ prin

$$(4)\quad d_n=\frac{1}{\sqrt{a_1}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{a_n}}-\lambda\sqrt{a_n},\quad \lambda\in\mathbb{R}$$

şi arătăm că el este convergent numai dacă $\lambda=2r$.

În această notă se prezintă o generalizare de tipul (3) pentru (4).

II. Considerăm şirul $(e_n)_{n\geq 1}$ definit prin:

$$(5)\quad e_n=\frac{1}{\sqrt[p]{a_1^{p-1}}}+\frac{1}{\sqrt[p]{a_2^{p-1}}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[p]{a_n^{p-1}}}-\lambda\sqrt[p]{a_n}\quad n\geq 1$$

$\lambda\in\mathbb{R}, p\in\mathbb{N}, p\geq 2$

Propoziţie. *Şirul (5) este convergent numai dacă $\lambda = p/r$.*

Demonstraţie. Ca şi în [2] se demonstrează dubla inegalitate

$$(6)\quad \frac{p}{\gamma}\left(\sqrt[p]{a_{k+1}}\right)-\left(\sqrt[n]{a_k}\right)<\frac{1}{\sqrt[p]{a_k^{p-1}}}<\frac{p}{\gamma}\left(\sqrt[p]{a_k}-\sqrt[p]{a_{k-1}}\right),\qquad k\geq 2$$

Dacă luăm în (6), pe rând, $k=2,3,\dots,n$ şi însumăm inegalităţile obţinute găsim:

$$(7)\quad \frac{p}{\gamma}\left(\sqrt[p]{a_{n+1}}-\sqrt[p]{a_2}\right)<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt[p]{a_k^{p-1}}}<\frac{p}{\gamma}\left(\sqrt[p]{a_n}-\sqrt[p]{a_1}\right)$$

Adunând în fiecare din membrii dublei inegalităţii (7) pe $\frac{1}{\sqrt[p]{a_1^{p-1}}}-\lambda\sqrt[p]{a_n}$ putem scrie:

$$(8)\quad \left(\frac{p}{\gamma}-\lambda\right)\sqrt[p]{a_{n+1}}+\lambda\left(\sqrt[p]{a_{n+1}}-\sqrt[p]{a_n}\right)+\frac{1}{\sqrt[p]{a_1^{p-1}}}-\frac{p}{\gamma}\sqrt[p]{a_2}<e_n<$$

$$<\left(\frac{p}{\gamma}-\lambda\right)\sqrt[p]{a_n}+\frac{1}{\sqrt[p]{a_1^{p-1}}}-\frac{p}{\gamma}\sqrt[p]{a_1}$$

Se observă că:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \infty;$

şi

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_{n+1}} - \sqrt[p]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma}{\sqrt[p]{a_{n+1}^{p-1}} + \sqrt[p]{a_{n+1}^{p-2}\, a_n} + \ldots + \sqrt[p]{a_n^{p-1}}} = 0$$

Cazul 1. Dacă $\lambda < p/r$, atunci din partea întâia a inegalităţii (8) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} e_n \geq \infty$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \infty$.

Cazul 2. Pentru $\lambda > p/r$, din partea a doua a inegalităţii (8) deducem $\lim\limits_{n\to\infty} e_n \leq -\infty$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = -\infty$.

Cazul 3. Dacă $\lambda = p/r$, folosind (8) şi faptul că $\sqrt[p]{a_{n+1}} - \sqrt[p]{a_n} > 0$ obţinem:

$$(9) \quad \frac{1}{\sqrt[p]{a_1^{p-1}}} - \frac{p}{\gamma} \sqrt[p]{a_2} < e_n \frac{1}{\sqrt[p]{a_1^{p-1}}} - \frac{p}{\gamma} \sqrt[p]{a_1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ceea ce ne arată că şirul (e_n) este mărginit.
Deoarece

$$e_{n+1} - e_n = \frac{1}{\sqrt[p]{a_{n+1}^{p-1}}} - \frac{p}{\gamma} \sqrt[p]{a_{n+1}} + \frac{p}{\gamma} \sqrt[p]{a_n} =$$

$$= \frac{r - pa_{n+1} + p\sqrt[p]{a_{n+1}^{p-1}\, a_n}}{\sqrt[p]{a_{n+1}^{p-1}}}$$

şi

$$\sqrt[p]{a_{n+1}^{p-1}}\, a_n < \frac{a_{n+1} + \ldots + a_{n+1} + a_n}{p} = \frac{pa_{n+1} + a_n - a_{n+1}}{p} = \frac{pa_{n+1} - r}{p},$$

deducem că $e_{n+1} - e_n < 0$, $n = 1, 2, \ldots$, adică şirul $(e_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

Aşadar, şirul (e_n) este convergent. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = L$ atunci din (8) rezultă:

$$\frac{1}{\sqrt[p]{a_1^{p-1}}} - \frac{p}{\gamma} \sqrt[p]{a_2} \leq L \frac{1}{\sqrt[p]{a_1^{p-1}}} - \frac{p}{\gamma} \sqrt[p]{a_1}$$

Cazuri particulare.

1. Pentru $p=2$ din (3) se obţine şirul (4).

2.Dacă $a_1=1$şi $r=1$, atunci din (3) găsim şirul (3).

Observaţie. Procedând ca în [2], se poate caracteriza ordinul de convergenţă pentru şirul (e_n).

BIBLIOGRAFIE

1.ACU,D., Asupra unei probleme a lui A.G.Ioachimescu,G.M. (trimisă pentru publicat).

2.BERINDE,V., O generalizare a unei probleme a lui A.G.Ioachimescu, Lucrările Seminarului de Creativitate matematică,Vol.2,(1992-1993),55-60,Universitatea din Baia Mare, 1994.

3.CĂTANĂ,Alin.,CĂTANĂ Aurelia.,Probleme de analiză matematică şi observaţii metodologice, Ed.Did.şi Pedagogică.,R.A.,Bucureşti,1993.

4.NĂSTĂSESCU,C., Algebra, manual pentru clasa a IX-a, Ed.did.şi pedagogică.,1993.

5.SIRETCHI,GH., Calculul diferenţial şi integral,vol.2, Ed.Ştiinţifică şi Enciclopedică,Bucureşti,1985.

6.VERNESCU,A.,Analiză matematică,353 probleme rezolvate, vol.1, Ed.Pantheon,Bucureşti,1991.

7.BERINDE,V., Asupra unei probleme a lui A.G.Ioachimescu,Gazeta Matematică, Anul IC(1994),nr.7, 310-313.

A NEW GENERALIZATION OF A PROBLEM OF A.G.IOACHIMESCU

ABSTRACT. In this note we consider the sequence $(e_n)_{n\geq 1}$,given by (5). It is shown that (e_n) is convergent only if $\lambda = p/r$, where r is the common difference of the aritmetical progression $(a_n)_{n\geq 1}$. For p=2 we obtain the sequence (4) which has been studied in [1].If $a_1=1$ and r=1,then we obtain the sequence (3) from [2] and [7]

Universitatea din Sibiu
Catedra de Matematică
2400-Sibiu
ROMÂNIA