Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.3(1993-1994),71-78

RELAŢII METRICE ÎNTRE CEVIENELE IMPORTANTE ALE UNUI TRIUNGHI

Nicolae OPREA

În această lucrare vom da câteva relaţii metrice foarte interesante şi originale între mediană şi celelalte ceviene importante ale unui triunghi ABC. Pentru simplificarea scrierii vom folosi notaţiile obişnuite dintr-un triunghi ABC iar prin notaţiile m_a, i_a s_a şi h_a vom înţelege: mediana, bisectoarea, mediana şi înălţimea coborâte din A. Pentru demonstrarea unor teoreme din această lucrare ne vom folosi de următoarele rezultate publicate în lucrarea [1]:

Lema 1. În orice triunghi ABC avem relaţia:

$$\frac{b^2+c^2}{2bc}=\frac{m_a}{s_a}$$

TEOREMA 1. *În orice triunghi ABC avem relaţia:*

$$\vec{m}_a\cdot\vec{i}_a=p(p-a)$$

În cele ce urmează vom demonstra următoarele rezultate:

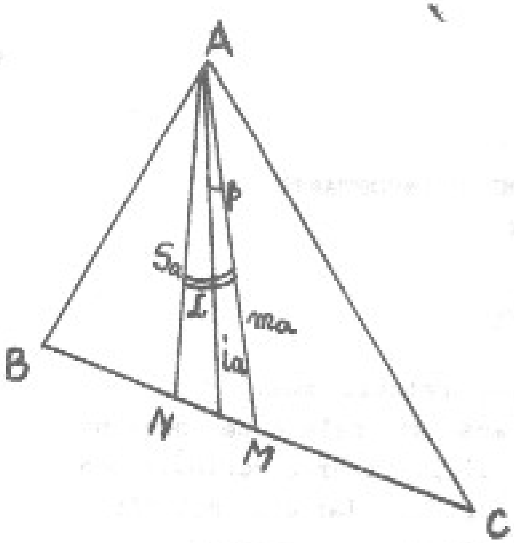
TEOREMA 2. *În orice triunghi neisoscel ABC avem relaţia:*

$$\cos A=\frac{m_a\cos\alpha-s_a}{m_a-s_a\cos\alpha}$$

unde $\alpha=\measuredangle(m_a,s_a)$

Demonstraţie. Dacă notăm $\beta=\measuredangle(m_a,i_a)$ atunci conform teoremei 1 avem relaţia :

$m_a i_a\cos\beta=p(p-a)$



Din această relaţie rezultă că:

$$\frac{m_a i_a \cos\beta}{bc}=\frac{p(p-a)}{bc}$$

de unde obţinem relaţia

$$\frac{m_a i_a \cos\beta}{bc}=\cos^2\frac{A}{2} \qquad (1)$$

Din relaţia (1) şi din relaţia

$$i_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$$

deducem că

$$\cos\beta=\frac{(b+c)\cos\frac{A}{2}}{2m_a}$$

de unde rezultă relaţia

$$\cos^2\beta=\frac{(b+c)^2\cos^2\frac{A}{2}}{4m_a^2} \qquad (2)$$

Pe de altă parte din lema 1 deducem că

$$\frac{(b+c)^2}{2bc}=\frac{m_a+s_a}{s_a}$$

de unde rezultă relaţia

$$(\ +\ )=\frac{(\ +\ )}{\ } \qquad (3)$$

Din relaţiile (2) şi (3) obţinem relaţia

$$\cos^2\beta=\frac{2bc(m_a+s_a)\cos^2\frac{A}{2}}{4m_a^2 s_a} \qquad (4)$$

Pe de altă parte din teorema cosinuşilor deducem că

$$2bc\cos A=b^2+c^2-a^2,$$

iar din teorema medianei obţinem

$$a^2=2(b^2+c^2)-4m_a^2$$

Din aceste două relaţii deducem relaţia

$$2bc\cos A=4m_a^2-(b^2+c^2)$$

Din ultima relaţie şi din relaţia $b^2+c^2=\dfrac{2bc\,m_a}{s_a}$ (vezi lema 1) rezultă relaţia

$$4m_a^2=2bc\left(\frac{m_a}{s_a}+\cos A\right) \tag{5}$$

Din relaţiile (4) şi (5) deducem relaţia

$$\cos^2\beta=\frac{(m_a+s_a)\cos^2\dfrac{A}{2}}{m_a+s_a\cos A}$$

Din această relaţie rezultă că

$$2\cos^2\beta-1=\frac{m_a\left(2\cos^2\dfrac{A}{2}-1\right)+s_a\left(2\cos^2\dfrac{A}{2}-\cos A\right)}{m_a+s_a\cos A}$$

de unde având în vedere faptul că $\cos A=2\cos^2\dfrac{A}{2}-1$ şi $\cos\alpha=2\cos^2\beta-1$

($\alpha=2\beta$, *AM si AN* sunt ceviene izogonale) obţinem relaţia

$$\cos\alpha=\frac{m_a\cos A+s_a}{m_a+s_a\cos A} \tag{6}$$

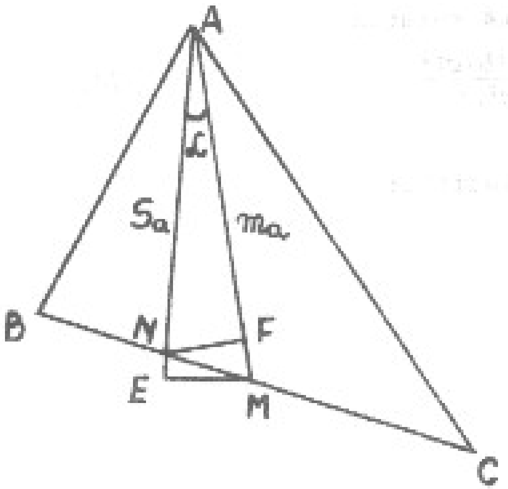
Din relaţia (6) după efectuarea calculelor deducem că

$$\cos A=\frac{m_a\cos\alpha-s_a}{m_a-s_a\cos\alpha}$$

Consecinţa 2.1. Dacă într-un triunghi neisoscel ABC se duc mediana AM şi simediana AN şi dacă notăm cu E proiecţia lui M pe AN şi cu F proiecţia lui N pe AM atunci există relaţia:

$$\cos A=\frac{NE}{MF}$$

Demonstraţie



Deoarece $m_a\cos\alpha=AE$ rezultă că

$m_a\cos\alpha-s_a=AE-s_a=NE$

Analog $m_a-s_a\cos\alpha=MF$

Din datele relaţiei şi teorema 2 deducem că

$$\cos A=\frac{NE}{MF}$$

Observaţie. Deoarece $m_a>s_a$ rezultă că

$$m_a>s_a\cos\alpha \qquad (1)$$

Din (1) rezultă că punctul F este situat între A şi M indiferent dacă $\hat{A}$ este ascuţit sau obtuz.

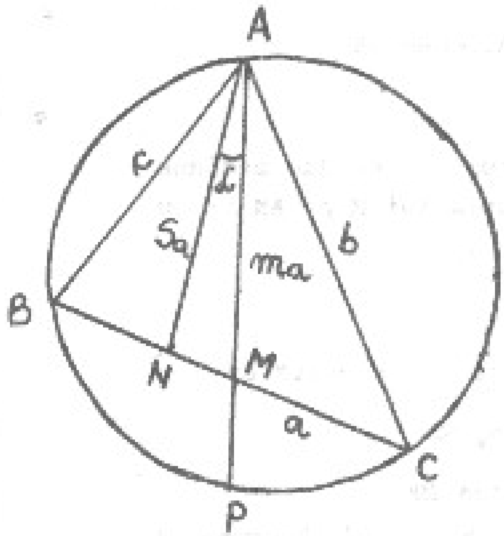
Pe de altă parte din (1) rezultă $m_a-s_a\cos\alpha>0$ (2).

Dacă $\hat{A}$ este ascuţit rezultă $\cos A>0$. Din această relaţie şi din (2) deducem că $m_a\cos\alpha-s_a>0$ de unde rezultă că $AE>s_a$ adică punctul E este situat pe prelungirea segmentului AN. Dacă $\hat{A}$ este obtuz atunci $\cos A<0$ şi ţinând cont de relaţia (2) rezultă $m_a\cos\alpha-s_a<0$ de unde rezultă că E este situat între A şi N.

Lema 2. Dacă într-un triunghi neisoscel ABC se duc mediana AM şi simediana AN şi dacă dreapta AM intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC în punctul P atunci există relaţia

$$\frac{NM^2}{m_a^2-s_a^2}=\frac{MP}{m_a}$$

Demonstraţie



Din teorema simedianei rezultă că

$\frac{NC}{BN}=\frac{b^2}{c^2}$ de unde deducem relaţia

$$NC=\frac{ab^2}{b^2+c^2} \qquad (1)$$

Fără a restrânge generalitatea putem presupune $b>c$. Din relaţia (1) şi din relaţia $NM=NC-\frac{a}{2}$ deducem că

$$NM=\frac{a(b^2-c^2)}{2(b^2+c^2)}$$

de unde rezultă relaţia

$$NM^2=\frac{a^2(b-c)^2(b+c)^2}{4(b^2+c^2)^2} \qquad (2)$$

Pe de altă parte din lema 1 deducem relaţiile:

$$b^2+c^2=\frac{2bc\,m_a}{s_a},\quad (b+c)^2=\frac{2bc(m_a+s_a)}{s_a}\quad \text{şi}\quad (b-c)^2=\frac{2bc(m_a-s_a)}{s_a}$$

Din aceste relaţii şi din relaţia (2) rezultă că

$$NM^2=\frac{a^2(m_a^2-s_a^2)}{4m_a^2}$$

Din ultima relaţie obţinem relaţia

$$\frac{NM}{m_a^2-s_a^2}=\frac{a^2}{4m_a^2} \qquad (3)$$

Aplicând puterea punctului M faţă de cercul circumscris triunghiului ABC rezultă că

$$m_a\cdot MP=\frac{a^2}{4} \qquad (4)$$

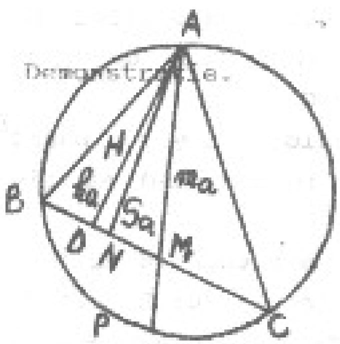
Din relaţiile (3) şi (4) obţinem

$$\frac{NM^2}{m_a^2-s_a^2}=\frac{MP}{m_a}$$

TEOREMA 3. *Dacă într-un triunghi ascuţitunghic neisoscel ABC se duc înălţimea AD şi mediana AM şi dacă H este ortocentrul şi P punctul în care AM intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC atunci există relaţia*

$$AH\cdot h_a=(m_a-MP)\,m_a$$

Demonstraţie.



Din lema 2 şi din relaţia

$$NM^2=m_a^2+s_a^2-2m_a s_a\cos\alpha$$

(N fiind piciorul simedianei coborâte din A) deducem relaţia

$$\frac{m_a^2+s_a^2-2m_a s_a\cos\alpha}{m_a^2-s_a^2}=\frac{MP}{m_a} \qquad (1)$$

Din relaţia (1) aplicând proprietăţile rapoartelor deducem relaţiile:

$$\frac{m_a\cos\alpha-s_a}{m_a^2-s_a^2}=\frac{m_a-MP}{2s_a m_a}\quad \text{şi}\quad \frac{m_a-s_a\cos\alpha}{m_a^2-s_a^2}=\frac{AP}{2m_a^2}$$

împărțind membru cu membru aceste două relații obținem relația

$$\frac{m_a\cos\alpha - s_a}{m_a - s_a\cos\alpha} = \frac{(m_a - MP)m_a}{s_a \cdot AP}$$

de unde ținând cont de teorema 1 și de relația $s_a \cdot AP = bc$ deducem relația

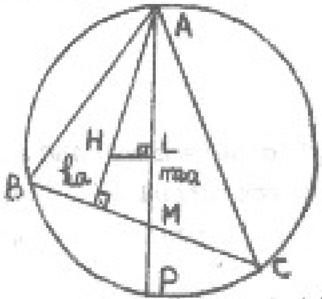
$$\cos A = \frac{(m_a - MP)m_a}{bc}$$

Din ultima relație și din relațiile $bc = 2Rh_a$ și $2R\cos A = AH$ obținem relația

$$AH \cdot h_a = (m_a - MP)m_a$$

Consecința 3.1. Dacă într-un triunghi ascuțitunghic ABC punctul L este proiecția ortocentrului H pe mediana AM atunci simetricul lui L față de M se găsește pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Demonstrație. Deoarece patrulaterul LHDM este inscriptibil aplicând puterea punctului A față de cercul circumscris acestui patrulater avem relația:



$AH \cdot h_a = (m_a - ML) \cdot m_a$

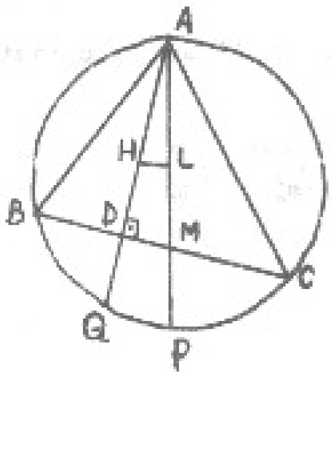
Pe de altă parte conform teoremei 3 avem relația:

$AH \cdot h_a = (m_a - MP) \cdot m_a$

Din aceste două relații rezultă că $ML = MP$ de unde rezultă că punctele L și P sunt simetrice față de M deoarece P este situat pe cercul circumscris, rezultă că simetricul lui L față de M se găsește pe cercul circumscris triunghiului ABC.

Aplicație. Fiind dat un triunghi ADM dreptunghic în D și un punct $H \in (AD)$ să se construiască un triunghi ABC în care AD să fie înălțime, AM mediană și H ortocentru.

Soluție. Fie L proiecția punctului H pe AM. Notăm cu P simetricul lui L față de M. Din consecința 3.1. știm că P este situat pe cercul circumscris triunghiului ABC. Notăm cu Q simetricul lui H față de D.



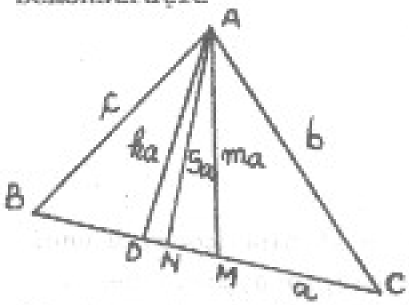
Conform unei teoreme a lui Euler

punctul Q este situat pe cercul circumscris triunghiului ABC. Deci cercul circumscris triunghiului ABC coincide cu cercul care trece prin punctele A,P, şi Q de unde rezultă că dacă construim cercul care trece prin A,P şi Q şi intersectându-l cu dreapta MD se obţin punctele B şi C.

TEOREMA 4 *Într-un triunghi ascuţitunghic neisoscel ABC avem relaţia*

$$\frac{\sin(\sphericalangle(h_a,s_a))}{\sin(\sphericalangle(h_a,m_a))}=\cos A$$

Demonstraţie



Fără a restrânge generalitatea putem presupune că b>c.

Din relaţiile DC=b cosC şi $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

rezultă relaţia $DC=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$ (1)

Din teorema simedianei avem relaţia

$$\frac{NC}{BN}=\frac{b^2}{c^2}$$

de unde rezultă relaţia

$$NC=\frac{ab^2}{b^2+c^2} \quad (2)$$

Din relaţia DN=DC-NC şi din relaţiile (1) şi (2) deducem relaţia:

$$DN=\frac{(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{2a(b^2+c^2)} \quad (3)$$

Pe de altă parte din relaţiile:DM=DC-MC, $MC=\frac{a}{2}$ şi din relaţia (1) obţinem ralaţia

$$DM=\frac{b^2-c^2}{2a} \quad (4)$$

Din relaţiile (3) şi (4) şi din lema 1 deducem relaţia

$$\frac{DN}{s_a}\cdot\frac{m_a}{DM}=\cos A \tag{5}$$

Triunghiurile ADN şi ADM fiind dreptunghice cu D rezultă că:

$\sin(\sphericalangle(h_a,s_a))=\frac{DN}{s_a}$, $\sin((\sphericalangle h_a,m_a))=\frac{DM}{m_a}$. Din aceste relaţii şi din relaţia (5) deducem că:

$$\frac{\sin(\sphericalangle(h_a,s_a))}{\sin(\sphericalangle(h_a,m_a))}=\cos A$$

BIBLIOGRAFIE

1. OPREA,N.,- Relaţii metrice între medianele şi bisectoarele unui triunghi; Gazeta Matematică 6-7/1990,pag.170-174

METRICAL RELATIONS BETWEEN THE IMPORTANT LINES IN A TRIANGLE

In this note some original and very interesting metrical relations involving certain important lines in a triangle are given.For exemple (Theorem 2), if ABC is a nonisosceles triangle and m_a, s_a, α denote the median, the simedian drawing by A, and the angle between m_a and s_a, respectively, then we have

$$\cos A=\frac{m_a\cos\alpha-s_a}{m_a-s_a\cos\alpha} \quad \text{or} \quad \frac{\sin\sphericalangle(h_a,s_a)}{\sin\sphericalangle(h_a,m_a)}=\cos A$$

(the simedian is the symetric of the bisectrix with respect to the median).

Universitatea din Baia Mare
str.Victoriei, nr.76,4800 Baia Mare
ROMÂNIA