Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.3(1993-1994),79-88

ASUPRA UNEI TEOREME DE MEDIE A LUI FLETT

Maria S.POP

În anul 1957, Flett [2] demonstrează o teoremă de medie care, din punct de vedere geometric, exprimă următoarele: *dacă* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *este derivabilă pe* $[a,b]$ *şi tangentele la graficul acestei funcţii în punctele* $A(a,f(a))$ *şi* $B(b,f(b))$ *sunt paralele, atunci există un punct* $C\in\widehat{AB}$ *(respectiv* $D\in\widehat{AB}$*) în care tangenta la graficul funcţiei* f *coincide cu coarda* AC *(respectiv* BD*).*

Pornind de la unele generalizări naturale ale acestei teoreme aparţinând lui Bursuc [1] în cele ce urmează vom da o extindere a acestor rezultate în $\mathbb{R}^n$.

1. Prezentăm pentru început rezultatele referitoare la funcţii reale de o variabilă reală:

1.1. Teoremă [1] *Dacă* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *sunt funcţii derivabile pe* $[a,b]$ *cu* $g'(x)\neq 0$ $(\forall)x\in[a,b]$ *şi* $\dfrac{f'(a)}{g'(a)}=\dfrac{f'(b)}{g'(b)}$ *, atunci există* $c\in(a,b)$ *astfel încât*

$$\frac{f(c)-f(a)}{g(c)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{1}$$

Demonstraţie. Ipoteza $g'(x)\neq 0$ $(\forall)x\in[a,b]$ implică că g'

păstrează semn constant pe [a,b], deci funcția g este strict monotonă pe [a,b], fie spre exemplu crescătoare. Definim funcția $h:[a,b] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} & , \text{ pentru } x \neq a \\ \dfrac{f'(a)}{g'(a)} & , \text{ pentru } x = a \end{cases}$$

Deoarece h este continuă pe intervalul [a,b], ea este mărginită și își atinge marginile în acest interval. Dacă cel puțin unul din punctele de extrem este interior intervalului, fie el c, atunci întrucât funcția h este derivabilă pe (a,b), aplicându-i teorema lui Fermat rezultă $h'(c)=0$, deci

$(f(c)-f(a))g'(c)-(g(c)-g(a))f'(c) = 0$,relație care se poate scrie sub forma (1).

Dacă funcția h își atinge marginile simultan în extremități, spre exemplu, $h(a) \leq h(x) \leq h(b)$; $(\forall)\, x \in [a,b]$, atunci cum g este strict crescătoare pe acest interval din $h(x) \leq h(b)$ rezultă

$h(x)(g(x)-g(a)) \leq h(b)(g(x)-g(a))$ deci $f(x) \leq f(a)+h(b)(g(x)-g(a))$.

Prin urmare

$$\frac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)} \geq \frac{f(b)-f(a)+h(b)(g(a)-g(x))}{g(b)-g(x)} =$$

$$= \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(x)}\left[1+\frac{h(b)(g(a)-g(x))}{f(b)-f(a)}\right] =$$

$$= \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(x)}\left[1+\frac{g(a)-g(x)}{g(b)-g(a)}\right] = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = h(b)$$

Trecând la limită avem $h(b) \leq \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x<b}} \dfrac{f(b)-f(x)}{g(b)-g(x)} = \dfrac{f'(b)}{g'(b)} = \dfrac{f'(a)}{g'(a)} = h(a)$

ceea ce este posibil numai dacă funcția h este constantă pe intervalul [a,b]. Prin urmare $h'(x)=0,\ (\forall)\, x \in (a,b)$.
Aceasta ne arată că relația (1) are loc pentru orice $c \in (a,b)$. În

particular, pentru g(x)=x obţinem teorema lui Flett a cărei interpretare geometrică am indicat-o în introducerea prezentei lucrări:

1.2. Corolar [2] Dacă funcţia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe [a,b] şi $f'(a)=f'(b)$, atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = f'(c) \qquad (2)$$

1.3. Observaţie. Din cauza simetriei în raport cu a şi b a condiţiilor din ipoteza teoremei 1.1 putem afirma că există şi un punct $d\in(a,b)$ astfel încât

$$\frac{f(d)-f(b)}{g(d)-g(b)} = \frac{f'(d)}{g'(d)} \qquad (1')$$

respectiv

$$\frac{f(d)-f(b)}{d-b} = f'(d) \qquad (2')$$

în cazul corolarului 1.2

1.4. Exemplu. Pentru funcţia $f: [-1,1] \to \mathbb{R}$; $f(x) = x^3$ cu $f'(-1) = f'(1)$ există punctele $c=\frac{1}{2}$ şi $d=-\frac{1}{2}$ astfel încât $f(c)-f(-1)=f'(c)(c+1)$ respectiv

$$f(d)-f(1) = f'(d)(d-1)$$

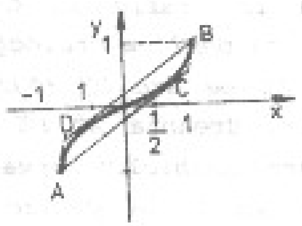

Fig.1

ceea ce arată că tangentele în c respectiv d la graficul acestei funcţii trec prin A(-1,1) respectiv B(1,1)(vezi Fig.1)

Ca o aplicaţie a teoremei lui Flett am obţinut următorul rezultat

1.5.Teoremă. *Dacă funcţia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe*

$[a,b]$, $f'(b)\neq 0$ și $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = -\dfrac{1}{f'(b)}$ atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât

$$\left|\frac{f(c)-f(a)}{c-a}-f'(c)\right| = \sqrt{1+f'^2(c)} \qquad (3)$$

Demonstrație. Fie funcția $F:[a,b]\to\mathbb{R}$; $F(x)=[f(x)-f(a)]^2+(x-a)^2$ continuă și derivabilă pe $[a,b]$ cu $F'(x)=2(f(x)-f(a))f'(x)+2(x-a)$. Întrucât $f(a)=0$ iar conform ipotezei și $F'(b)=0$, suntem în condițiile teoremei lui Flett, ceea ce ne arată că există un punct $c\in(a,b)$ astfel încât $F(c)-F(a)=F'(c)(c-a)$, adică

$$[f(c)-f(a)]^2+(c-a)^2 = 2(f(c)-f(a))f'(c)(c-a)+2(c-a)^2 \text{ sau}$$

$$[f(c)-f(a)-f'(c)(c-a)]^2 = (c-a)^2(1+f'^2(c)) \text{ de unde}$$

rezultă relația (3).

Frumusețea acestui rezultat constă în *interpretarea geometrică* a teoremei: *Dacă tangenta la graficul AB a funcției f este perpendiculară pe coarda AB, atunci există un punct C∈AB astfel încât distanța de la A la tangenta la grafic în C să coincidă cu mărimea proiecției coardei AC pe axa OX (Fig.2) respectiv, dreapta AC să fie bisectoarea unghiului format de tangenta în C la grafic și paralela la axa OY în C.*

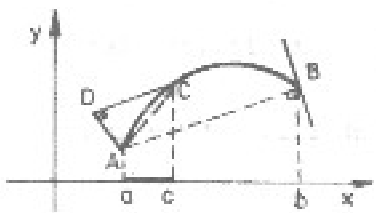

Fig.2

Problemă propusă. În ce condiții există puncte ale graficului $\overset{\frown}{AB}$ a unei funcții $f:[a,b]$ derivabile pe $[a,b]$ cu proprietatea că AC să fie normală la grafic, adică

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = -\frac{1}{f'(c)} \ ?$$

În lucrarea [2] se enunță fără demonstrație o altă generalizare a teoremei lui Flett, mărind ordinul de derivabilitate a funcției f. Prezentăm în continuare o demonstrație a acestei generalizări.

1.6. Teoremă. *Dacă $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este derivabilă de n ori pe $[a,b]$ și $f^{(n)}(a)=f^{(n)}(b)$, atunci există un punct $c\in(a,b)$ astfel încât*

$$f(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(a-c)^k \tag{4}$$

Demonstrație. Fie funcția $F_{n,a}: [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$F_{n,a}(x) = \begin{cases} f(a) - \dfrac{T_{n-1,a}(x)}{(a-x)^n}, & \text{pentru } x\neq a \\ \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}, & \text{pentru } x=a \end{cases}$$

unde $$T_{n-1,a}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)(a-x)^k}{k!},$$

Deoarece funcția $T_{n-1,a}$ este derivabilă pe $[a,b]$ și

$T_{n-1,a}(x) = \dfrac{(a-x)^{n-1}f^{(n)}(x)}{(n-1)!}$, aplicând regula lui l'Hopital avem

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} F_{n,a}(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = F_{n,a}(a),$$

funcția $F_{n,a}$ este continuă pe $[a,b]$ și prin urmare își atinge marginile în $[a,b]$. De asemenea pentru orice $x \in (a,b)$ funcția $F_{n,a}$ este derivabilă și

$$F'_{n,a}(x) = \frac{n}{a-x}\left[F_{n,a}(x) - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right] = nF_{n+1,a}(x)$$

Dacă cel puțin unul din punctele de extrem ale lui $F_{n,a}$ este interior intervalului (a,b), fie el $c \in (a,b)$, atunci conform teoremei lui Fermat, $F_{n,a}'(c) = 0$, deci conform egalității de mai sus

$$F_{n,a}(c) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

sau

$$f(a) - T_{n-1,a}(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(a-c)^n$$

relație ce poate fi scrisă sub forma (4):

$$f(a) = f(c) + f'(c)\frac{(a-c)}{1!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)(a-c)^n}{n!}$$

Dacă $F_{n,a}$ își atinge marginile simultan în extremitățile intervalului, de exemplu dacă $\min\limits_{x \in [a,b]} F_{n,a}(x) = F_{n,a}(a)$ și

$\max\limits_{x \in [a,b]} F_{n,a}(x) = F_{n,a}(b)$,atunci deoarece

$F_{n,a}(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, $\frac{f^{(n)}(b)}{n!} = F_{n,b}(b)$ putem scrie

$$F_{n,a}(a) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} F_{n,b}(x) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{F_{n-1,b}(x) - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}}{b-x} =$$

$$= \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{F_{n-1,b}(x) + (a-x)F_{n,a}(x) - F_{n-1,a}(x)}{b-x} \geq$$

$$\geq \lim_{\substack{x\to b\\x<b}} \frac{F_{n-1,b}(x) + (a-x)F_{n,a}(b) - F_{n-1,a}(x)}{b-x} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to b\\x<b}} \frac{F'_{n-1,b}(x) - F_{n,a}(b) - F'_{n-1,a}(x)}{-1} =$$

$$= F_{n,a}(b) + \lim_{\substack{x\to b\\x<b}} (n-1)\left[F_{n,a}(x) - F_{n,b}(x)\right] = nF_{n,a}(b) - (n-1)F_{n,b}(b) =$$

$$= nF_{n,a}(b) - (n-1)F_{n,a}(a)$$

De aici rezultă $F_{n,a}(a) \geq F_{n,a}(b)$, ceea ce conform ipotezelor făcute asupra acestei funcţii, implică că ea este constantă. Prin urmare $F'_{n,a}(x) = 0\ \forall x\in(a,b)$; relaţia (4) are loc pentru orice $x\in(a,b)$.

1.7. Observaţii.

1) Pentru n=1 din teorema 1.6 obţinem teorema lui Flett (respectiv corolarul 1.2);

2. Teorema 1.6 exprimă existenţa unui punct $c\in(a,b)$ cu proprietatea că valoarea în punctul a, a polinomului lui Taylor ataşat funcţiei f în c coincide cu f(a).

3) Din cauza simetriei condiţiilor din ipoteza teoremei 1.6 putem afirma că în aceleaşi ipoteze există un punct $d\in(a,b)$ astfel încât

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(d)}{k!}(b-d)^k$$

(4')

2. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ un domeniu conex din $\mathbb{R}^n$, <,> produsul scalar canonic a doi vectori $a,b \in D$ segmentul $[a,b]=\{x\in \mathbb{R}^n;\ x=a+d(b-a);\ t \in [0,1]\}$.

2.1. Teoremă. *Dacă pentru funcţiile $f,g\colon D \to \mathbb{R}$, există, gradienţii ∇f şi ∇g pe segmentul $[a,b]$; $a,b \in D$, $\langle \nabla g(x), b-a\rangle \neq 0$*

$\forall x \in [a,b]$ și $\dfrac{\langle\nabla f(a,b-a\rangle}{\langle\nabla g(a),b-a)\rangle} = \dfrac{\langle\nabla f(b),b-a\rangle}{\langle\nabla g(b),b-a\rangle}$, atunci există $c \in]a,b[$ astfel încât

$$(f(c)-f(a))\langle\nabla g(c),c-a\rangle = (g(c)-g(a))\langle\nabla f(c),c-a\rangle \tag{5}$$

sau

$$(f(c)-f(a))\,\delta(g(c),c-a) = (g(c)-g(b))\,\delta(f(c),c-a) \tag{5'}$$

unde $\delta(f(c),c-a)$ și $\delta(g(c),c-a)$ notează derivata direcțională a funcției f, respectiv g, în c după direcția de la a la c.

Demonstrație. Fie funcțiile $F,G\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $F(t)=(f\circ x)(t)-f(a)\,;G(t)=(g\circ x)(t)-g(a)$ obținute prin compunerea lui f, respectiv g, cu funcția $x\colon[0,1]\to\mathbb{R}^n; x(t)=a+t(b-a)$.

Din ipoteză rezultă că $F(0)=G(0)=0$ și F și G sunt funcții continue și derivabile pe intervalul $[0,1]$. Deoarece

$$\frac{dF}{dt} = \langle\nabla f(x,b-a\rangle\ ;\ \frac{dG}{dt} = \langle\nabla g(x,b-a\rangle \neq 0\ ;\ \forall t\in[0,1]$$

și

$$\frac{F'(0)}{G'(0)} = \frac{\langle\nabla f(a),b-a\rangle}{\langle\nabla g(a),b-a\rangle} = \frac{\langle\nabla f(b),b-a\rangle}{\langle\nabla g(b),b-a\rangle} = \frac{F'(1)}{G'(1)}\ ,$$

suntem în condițiile teoremei 1.1, deci există $\xi\in(0,1)$ astfel încât

$$\frac{F(\xi)-F(0)}{G(\xi)-G(0)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

Dacă $c = x(\xi)\in]a,b[$ este punctul interior segmentului $[a,b]$ corespunzător lui ξ, atunci relația de mai sus se poate scrie

$$\frac{f(c)-f(a)}{g(c)-g(a)} = \frac{\langle\nabla f(c),b-a\rangle}{\langle\nabla g(c),b-a\rangle}$$

respectiv sub forma (5).

2.2. Corolar. (generalizarea teoremei lui Flett). Dacă $f:D\subseteq\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a,b \in D$, există ∇f pe segmentul $[a,b]$ şi $< \nabla f(a)-\nabla f(b), b-a > = 0$, atunci există $c \in]a,b[$ astfel încât

$$f(c)-f(a) = \langle \nabla f(c), c-a \rangle \tag{6}$$

Demonstraţie. Aplicând teorema 2.1 funcţiilor f din enunţ şi $g:D \to \mathbb{R}$; $g(x) = \langle x,b-a \rangle$, întrucât $\nabla g = b-a$ şi $g(c)-g(a)=\langle c-a, b-a \rangle$, obţinem relaţia (6).

2.3. Interpretare geometrică. Corolarul 2.2 exprimă faptul că oricare ar fi $A(a,f(a))$, $B(b,f(b)) \in D\times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ puncte aparţinând hipersuprafeţei (S) de ecuaţie $x_{n+1} = f(x)$; $x = (x_1,\dots,x_n)\in D$ cu proprietatea că mărimea proiecţiei normalelor la (S) pe vectorul b-a este aceeaşi, există un punct intermediar C pe arcul de curbă $\widehat{AB}$ trasat pe (S) de ecuaţie $x_{n+1} = f(a+t(b-a))$; $t\in[0,1]$; $C(c,f(c))$ astfel încât hiperplanul tangent în C la (S) să treacă prin A.

BIBLIOGRAFIE

1. BURSUC, I., Câteva generalizări ale teoremei de medie a lui T.M.Flett, G.M. 2-3/1992, p.50-52;

2. FLETT, T.M., The definition of tangent to a curbe, Edingurgh, Math.Notes, 41(1957), pp.1-9.

ON A FLETT'S MEAN VALUE THEOREM

ABSTRACT. In the paper a generalization of a theorem of Flett [2]is proved.This result states that if $f \in C^n[a,b]$ and $f^{(n)}(a)=f^{(n)}(b)$, the there is $c\in(a,b)$ such that the value of the Taylor polynomial of f in c calculaled in the point a is equal to f(a).

In paragraph 2 the theorem of Flett is extended in $\mathbb{R}^n$ and a naturel generalization for two functions is given.

Universitatea din Baia Mare
str,Victoriei, nr.76 4800 Baia Mare
ROMÂNIA