Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.3(1993-1994),89-98

PRINCIPII DE BAZĂ PRIVIND REZOLVAREA CREATOARE A PROBLEMELOR

Vasile BERINDE

Rezolvarea unei probleme de matematică ar trebui să respecte, pe lângă rigoarea şi acurateţea matematică inerente, cel puţin următoarele trei principii:

1) principiul algoritmizării;
2) principiul generalităţii;
3) principiul generalizării.

Primul principiu, al *agoritmizării*, cere ca soluţia să fie clar structurată, evidenţiind etapele succesive ale rezolvării problemei,astfel încât principalele articulaţii ale soluţiei să se poată constitui într-o *schemă* bine conturată de rezolvare a problemei respective.

Cum rezolvarea oricărei probleme constă în efectuarea unei succesiuni de operaţii, algoritmizarea înseamnă tocmai gruparea şi ordonarea procesuală a acestor operaţii.

Respectarea acestui principiu conduce la o soluţie care va fi uşor de urmărit, de analizat şi de aplicat la o altă problemă din aceaşi clasă, atât de autorul soluţiei, dar mai ales de cei care vor citi această soluţie.

Cel de-al doilea principiu, al *generalităţii*, cere ca, atunci când am încheiat soluţionarea problemei iar soluţia noastră se constituie într-o metodă coerentă, să cercetăm în ce măsură această metodă poate fi aplicată altor probleme înrudite cu cea dată.

În acest scop este nevoie să căutăm şi să adunăm la un loc cât mai multe probleme din aceeaşi familie, pentru a valida *generalitatea* metodei obţinute. Dacă soluţia noastră are un caracter singular, ea nu va putea fi aplicată tuturor problemelor înrudite, dar dacă ea posedă argumente, deducţii şi implicaţii cu caracter *general*, vom putea - prin efectuarea unor corecții ,modificări sau îmbunătățiri- să ajungem la a construi o *metodă unitară* aplicabilă tuturor problemelor din această familie.

Colectarea problemelor înrudite în jurul unei metode unitare stă la baza elaborării oricărui manual sau culegeri de probleme și constituie, după părerea noastră, una dintre modalitățile cel mai des utilizate dar și cele mai eficace în pregătirea concursurilor școlare. Având la dispoziție o astfel de colecție de probleme precum și o metodă de rezolvare ilustrată pentru una sau mai multe dintre aceste probleme elevului îi revine misiunea să abordeze restul problemelor, pornind de la ideea de bază a metodei respective. Eforturile vizând aplicarea acestui principiu la rezolvarea unei probleme, îi conferă soluției obținute un prim caracter de creativitate.

Cel de-al treilea principiu enunțat de noi, *principiul generalizării*, deși evident înrudit cu principiul generalității, chiar și prin terminologie, nu poate fi întotdeauna identificat cu aceasta din urmă, așa cum vom arăta în continuare prin exemplele date.

Căci,în virtutea principiului generalizării, atunci când am finalizat soluționarea unei probleme - conform cerințelor din enunțul său inițial- nu trebuie să considerăm rezolvarea încheiată, înainte de a efectua cel puțin următoarele operații:

- să analizăm toate articulațiile soluției,
- să cercetăm și să evidențiem caracterul suficient, necesar sau necesar și suficient al fiecărui argument utilizat,
- să cercetăm și să evidențiem măsura în care au fost folosite ipotezele problemei în diferite etape ale rezolvării.

Aceasta ne va permite

- slăbirea unor condiții din enunțul problemei,
- înlocuirea unor condiții cu altele echivalente,
- eliminarea condițiile redondante (care nu sunt utilizate efectiv în rezolvarea noastră dar care apar în enunț datorită modului particular în care autorul însuși a soluționat problema).
- recunoașterea unor argumente, deducții, implicații care își

păstrează valabilitatea într-un context mai general;

- legarea concluziei problemei sau a unor rezultate parţiale obţinute de alte rezultate, pentru a obţine conexiuni şi interconexiuni ce lărgesc orizontul problemei.

Slăbirea unor condiţii din enunţul problemei se bazează în general pe depistarea condiţiilor suficiente şi pe cercetarea posibilităţii de înlocuire a acestora cu alte condiţii, care pot fi tot suficiente, dar mai slabe, sau pot fi de fapt condiţii necesare şi suficiente.

Efectuând această analiză detaliată a soluţiei obţinute şi apoi sintetizând cele constatate vom obţine, prin reformulare, noi probleme gata rezolvate, al căror enunţ conţine ipoteze mai slabe şi/sau a căror concluzie conţine rezultate mai tari decât cele din problema iniţială.

Dar cel mai mare câştig este că,procedând în acest fel,vom obţine sugestii pentru noi probleme, din aceeaşi categorie sau doar înrudite cu problema dată, pe care rămâne să le formulăm şi mai ales, să le soluţionăm.

O astfel de abordare a unei probleme de matematică o numim *abordare creatoare*.Ea duce la obţinerea de noi rezultate,stând de fapt la baza cercetării matematice.

Toate rezultatele din acest domeniu, dar nu numai, se obţin - conştientizat sau nu - prin aplicarea principiului generalităţii dar, mai ales, prin aplicarea principiului generalizării.

Trebuie spus,în încheierea acestor consideraţii , că nu oricărei probleme de matematică îi putem aplica aceste ultime două principii.Ceea ce înseamnă că nu orice problemă poate să constituie punctul de plecare în obţinerea de noi probleme. Cert este că toţi propunătorii de probleme,autorii notelor şi articolelor de matematică aplică într-o măsură sau alta aceste principii. Parcurgând *Gazeta Matematică* (tineret,dar mai ales cea metodică) cititorul se va convinge singur de temeinicia ideilor prezentate în această lucrare. Recomandăm în mod special articolele publicate în *Lucrările Seminarului de Creativitate Matematică*, ca o ilustrare a acestor idei.Lucrarea [9]din acest volum înfăţişează credem cel mai bine aplicarea acestor principii, dar recomandăm şi lucrarea [10]. Desigur, s-ar putea obiecta că, atunci când,aplicând principiul generalităţii, căutăm să ajustăm metoda noastră de rezolvare pentru a o face aplicabilă unei clase mai largi de probleme, efectuăm de fapt operaţiile subordonate principiului generalizării. Prin urmare, deşi s-ar putea obiecta că cele două principii sunt de fapt unul şi acelaşi principiu, noi vom păstra această separare, ilustrând-o prin câteva exemple. În esenţă, argumentul nostru se bazează pe faptul că *generalitatea* poate fi considerată un atribut al metodei utilizate în rezolvare, câtă vreme *generalizarea* se referă la formularea problemei respective, deci la noţiunile şi faptele implicate în enunţul acesteia. Generalitatea metodei utilizate înseamnă că aceasta poate fi utilizată la probleme înrudite, chiar diferite de cea dată, în timp ce generalizarea nu ne scoate înafara domeniului problemei respective.

Un exemplu de rezolvare creatoare a unei probleme de matematică.

Considerăm problema 2 din [9]:

" Un ogar urmăreşte o vulpe care are 60 sărituri înaintea lui. Peste câte sărituri va ajunge ogarul vulpea, ştiind că, pe când ogarul face 6 sărituri, vulpea face 9, dar că 3 sărituri de-ale ogarului fac cât 7 de-ale vulpii ?".

Vom încerca să evidenţiem acum modul în care au fost aplicate principiile enunţate anterior în rezolvarea acestei probleme.

Soluţia dată în [9] respectă *principiul algoritmizării*. Într-adevăr o putem structura astfel:

(Modelarea matematică)

Etapa 1. Notăm cu x numărul săriturilor necesare ogarului pentru a ajunge vulpea şi cu y numărul de sărituri pe care le face vulpea din momentul începerii urmăririi şi până în momentul în care este ajunsă.

Etapa 2. (Exploatarea condiţiilor temporale).

Într-o unitate de timp:

ogarul face 6 sărituri;

iar

vulpea face 9 sărituri,

aşadar pe toată durata urmăririi raportul dintre numărul săriturilor ogarului şi numărul săriturilor vulpii este acelaşi, adică

$$\frac{x}{y}=\frac{6}{9} \tag{1}$$

Etapa 3 *(Exploatarea condiţiilor spaţiale)*

Deoarece *lungimea*

a 3 sărituri ale ogarului

este egală cu cea

a 7 sărituri ale vulpii,

adică, reprezentând grafic

Ogar:

Vulpe:

rezultă că pe o *aceeaşi distanţă*,raportul dintre numărul săriturilor efectuate de ogar şi numărul săriturilor efectuate de vulpe este constant, şi anume 3/7.

Dar,pe distanţa parcursă de ogar, adică din punctul în care acesta începe urmărirea şi până în final

ogarul face x sărituri

iar

vulpea face 60+y sărituri,

deci obţinem

$$\frac{x}{60+y}=\frac{3}{7}$$

(2) **Etapa 4.** *(Rezolvarea sistemului de ecuaţii. Concluzia).*

Sistemul (1)+(2) este compatibil, deci ogarul ajunge vulpea. Soluţia este

$$\begin{cases} x=72 \\ y=108. \end{cases}$$

Este uşor de văzut, parcurgând lucrarea [9],că această metodă de rezolvare, bazată pe dichotomia timp-spaţiu, întrunește și atributul de *generalitate*, fiind aplicabilă oricărei probleme de acest tip.

Aplicarea principiului generalizării în [9] începe odată cu considerarea problemei 3 și se termină de-abia în finalul lucrării. Luând N,a,b, p și q în locul datelor din problema 1, respectiv 60,6,9,3 și 7, obținem o generalizare netrivială.

Căci,aplicând aceeași metodă de rezolvare - generalitatea metodei este astfel probată! - obținem o informație foarte prețioasă: problema 3 are soluție dacă și numai dacă

$$\frac{a}{b} > \frac{p}{q} \tag{3}$$

Aceasta ne arată, in primul rând, că formularea problemelor de urmărire trebuie îmbunătățită, punând înainte de toate întrebarea: " *urmărirea va fi incununată de succes ?*".În al doilea rând, formulele obținute pentru x și y, în cazul când (3) este satisfăcută, adică $\begin{cases} x=apN/(aq-bp) \\ y=bpN/(aq-bp) \end{cases}$

ne arată că suntem de fapt în posesia unei *"fabrici"* de probleme. Într-adevăr, dacă alegem numerele (naturale sau nu) a,b,p,și q în așa fel încât să indeplinească (3) și apoi luăm N un multiplu de aq-pb (în cazul în care a,b,p și q sunt naturale) obținem oricâte probleme dorim.

Tot relația (3) ne arată că urmărirea este finită nu numai în cazul în care ogarul are săritura destul de mare în raport cu cea a vulpii pentru a contracara diferența dintre frecvența săriturilor, ci și în cazul când frecvența săriturilor compensează diferența dintre lungimea săriturilor (a se vedea observația 3 din [9].

Dar aplicarea generalizării este mai clar evidențiată de introducerea unor noi probleme, mai complexe și cu grad de dificultate mai ridicat: probleme de urmărire limitată și probleme de tipul celor propuse de noi prin problemele 10-13.

Ilustrarea aplicării acestor principii la alte probleme poate fi găsită in [4]-[8] şi [10].

Concluzii

Am prezentat modul cum ar trebui să se deruleze o abordare creatoare, doar pentru câteva probleme elementare de matematică, dar aceleaşi consideraţii pot fi făcute, tot atât de bine, pentru orice capitol de matematici superioare. Căci orice cercetător - şi nu neapărat din domeniul matematicii - urmează în munca sa, într-o măsură sau alta, conştient sau nu, liniile generale ale principiilor enunţate de noi în această lucrare. Recomandăm cititorului recenta apariţie [15], care este bazată pe idei oarecum asemănătoare celor expuse în această lucrare. Dar, înainte de toate, cititorul interesat de acest subiect, este bine să citească excelenta carte a lui G.Polya [12], unde este expusă în detaliu o euristică a rezolvării problemelor de matematică.

Având în vedere faptul că şi în alte domenii de activitate apare necesitatea rezolvării unor probleme, considerăm că, oricare ar fi natura acestor probleme, pentru a le rezolva, omul investeşte *creativitate*, astfel spus, cea mai mare parte a ideilor expuse în această lucrare pot fi aplicate şi într-un context nematematic.

BIBLIOGRAFIE

1.BANEA,H.,Despre problemele didactice de matematică, Gazeta Matematică (metodică),Anul I(1980),nr.3,99-104

2.BANEA,H.,Despre problemele exhaustive, Gazeta Matematică (metodică), Anul VI(1985),nr.1-2,31-34.

3.BERINDE,V.,Dualitatea în studiul recurenţelor omografice, Lucr.Sem.Creativ.Mat.,vol 1(1991-1992),1-14.

4.BERINDE,V.,Caracterizări ale şirurilor convergente de numere reale cu ajutorul combinaţiilor liniare a k termeni consecutivi ai săi, Lucr.Sem.Creativ.Mat., vol 1(1991-1992),25-38

5.BERINDE,V.,O clasă de funcţii discontinue primitivabile, Gazeta Matematică, anul XCIV(1989),nr.6,214-220.

6.BERINDE,V.,Asupra unei probleme a lui A.G.Ioachimescu,Gazeta Matematică,anul IC(1994), nr.7,310-313.

7.BERINDE,V.,Principiul punctului fix aplicat la rezolvarea sistemelor circulare, Lucr.Sem.Creativ.Mat., vol 2(1992-1993),1-24.

8.BERINDE,V.,Probleme elementare privind aproximarea polinomială a unei clase de funcţii continue, Lucr. Sem. Creativ. Mat.,vol 3(1993-1994),1-22

9.BERINDE,V.,Două stateqii de abordare a problemelor de urmărire, Lucr.Sem.Creativ.Mat., vol 3(1993-1994), 29-42.

10.BERINDE,V.,How to stimulate engineering invention by means of mathematical approaches,Proceedings of the Conference "Teaching Mathematics for Industry", 18-20 sept 1994, Universitatea Tehnică Praga.

11.NETEA,A.,Probleme din Gazeta Matematică -punct de pornire în cercetarea ştiinţifică, Gazeta Matematică(metodică), Anul IV(1983),nr.3-4,127-130.

12.POLYA,G.,Descoperirea în matematică, Editura Ştiinţifică, Bucureşti,1971.

13.POLYA,G.,Cum să rezolvăm o problemă, Editura Ştiinţifică, Bucureşti,1965.

14.RUSU,E.,Psihologia activităţii matematice, Editura Ştiinţifică, Bucureşti,1969

15.RUSU,E., Cum gândim şi rezolvăm 200 de probleme, Editura Albatros, Bucureşti, 1972.

16.STEVENSON,F.W.,Exploratory problems in Mathematics, National Council of Teachers of Mathematics(SUA),Reston, 1992.

17.TEODORESCU,N.,Culegeri de probleme şi metodologiile de rezolvare,Gazeta Matematică (metodică),anul V(1984), nr.3-4, 99-105.

18.ZUGRAVU,A.,Între deprindere şi creaţie,Gazeta Matematică (metodică),Anul II(1981),nr.2-3,56-60.

BASIC PRINCIPLES REGARDING THE CREATIVE SOLUTION OF PROBLEMS

ABSTRACT.The aim of this paper is to illustrate three basic principles in solving creatively mathematical problems:

a) the algorithmicity principle;

b) the generality principle;

c) the generalization principle.

The first principle claims for a solution to be clearly constructed and well ordered, step by step.This principle is generally itself a creative principle in solving mathematical problems, but its importance consists in the fact that it open the way for the next creative steps of a solution.

These creative steps are based on applying the generality and/or the generalization principle, respectively.

The generality principle assumes to adapt/construct/obtain only those methods able to solve a given problem, which could be

applied to other similar or kindred problems.

By applying the generalization principle in solving a problem, we try to obtain a more general statement of the initial problem, even new problems, by replacing a particular data or assumption by a general one(s).

By applying systematically one or both these two principles in solving problem we expect to help students to learn

-to analyse in detail the crucial moments and reasonings in the solution of a problem

-to discover the reasonings they can improve or generalize.

-to endow with generality attributes the used method(s).

-to discover the questions arising from the given problem and its solution.

-to formulate suitable new problems arising from the given problem.

An example as well as some references are finally given.

Universitatea din Baia Mare
Str.Victoriei, nr.76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA