Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.3(1993-1994),99-104

OBSERVAŢII PRIVIND SUBSTITUŢIILE LUI CEBÂŞEV ÎN INTEGRALA BINOMĂ

Gabriella KOVÁCS

La examene şi concursuri de matematică, în culegeri de probleme şi reviste de specialitate întâlnim integrale de tipul

$$\int \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}\,dx \quad (x>0) \qquad \int \frac{\sqrt[4]{\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)^3}}{\sqrt{x}}\,dx \quad (0<x<1)$$

Ele se transformă cu uşurinţă în integrale binome:

$$\int x^{\frac{3}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{-\frac{1}{3}}dx \quad (x>0) \qquad \int x^{-\frac{1}{2}}\left(-x^{\frac{2}{3}}+1\right)^{\frac{3}{4}}dx \quad (0<x<1)$$

Cebâşev[1] a demonstrat, că integrala

$$(*) \quad \mathfrak{I} = \int x^m(ax^n+b)^p\,dx \quad a,b\in\mathbb{R}^*, x\in I\subset\mathbb{R}, m,n,p\in\mathbb{Q}, n\neq 0, p\neq 0$$

numită integrala binomă, se reduce la integrală din funcţie raţională numai în următoarele cazuri:

I. Dacă $p\in\mathbb{Z}$, cu substituţia $x=t^r$, unde r este un multiplu comun al numitorilor numerelor raţionale m şi n, puse în formă ireductibilă:

$$\mathfrak{I} = r\int t^{r(m+1)-1}(at^{rn}+b)^p\,dt \tag{1}$$

II. Dacă $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$, cu substituţia $ax^n+b=t^s$, unde s este numitorul numărului raţional p luat în formă ireductibilă, sau un multiplu al acestui numitor:

$$\mathfrak{I} = \frac{s}{n\cdot a^{\frac{m+1}{n}}}\int t^{s(p+1)-1}(t^s-b)^{\frac{m+1}{n}-1}\,dt \tag{2}$$

[1] *Pafnutii Lvovici Cebâşev (16.05.1821- 08.12.1894)*

III. Dacă $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$, cu substituţia $\frac{ax^n+b}{x^n}=t^s$,unde s este ca înainte:

$$\mathfrak{I}=-\frac{s}{n}b^{\frac{m+1}{n}+p}\int t^{s(p+1)-1}(t^s-a)^{-\frac{m+1}{n}-p-1}dt \tag{3}$$

Integralele obţinute în urma acestor substituţii sunt deasemenea integrale binome.

Observaţia 1.

Fie integrala $\int x^m(ax^n+b)^p dx$ ca în (*) şi fie f:I→ℝ o funcţie raţională arbitrară.

Substituţiile lui Cebâşev (în toate cele trei cazuri I,II,III) transformă, evident,în integrală de funcţie raţională şi următoarea integrală,mult mai generală, decât cea binomă:

$$J=\int x^m(ax^n+b)^p\cdot f(x^n)\,dx\ .$$

Dăm ca exemplu:

$$J=\frac{1}{\sqrt[n]{(\sqrt[m]{x^n}+1)^m(1+4x^{4n}+7x^{7n}+10x^{10n}+\ldots+31x^{31n})}}dx$$

unde m,n∈ℕ*\{1}, x>0.

Observaţia 2.

Substituţiile lui Cebâşev pot fi utile şi în cazul particular când m,n,p∈ℤ. În aceste cazuri nu obişnuim să ne gândim la substituţiile lui Cebâşev, probabil din cauză că funcţia de integrat este raţională, iar substituţiile lui Cebâşev în toate tratatele de analiză matematică apar sub titlul "Integrarea funcţiilor iraţionale".

De exemplu,

$$\mathfrak{I}_1=\int\frac{1}{kx^{\frac{1}{k}}+x}dx \qquad k\in N,\ k\geq 2,\ x>0$$

(Problema 22781*, G.M. 2-3/1993)

şi după despărţire în sumă de două integrale,

$$\mathfrak{I}_2=\int\frac{2+x^2}{x(1+x^2)^k}dx \qquad k\in\mathbb{N}^*,\ x\in I\subset\mathbb{R}^*$$

(Problema 21036*,G.M. 2/1987)

se calculează imediat, folosind substituţia (III).

Menţionăm, că soluţia autorului pentru integrala $\mathcal{J}$, se bazează pe o relaţie de recurenţă dificilă, dedusă pe cale artificială.

Propunem cititorului să calculeze în continuare următoarele integrale de funcţii raţionale:

$$\int \frac{x^{n^2}}{x^{n+1}+x}\,dx \quad n\in N^*,\ x>0$$

$$\int \frac{x^{n^2-1}}{(x^n+1)^n}\,dx \quad n\in N^*,\ x>-1$$

$$\int \frac{x^{n^m-1}}{x^n-1}\,dx \quad n,m\in N^*,\ x>1\ .$$

Observaţia 3.

Fie m,n,p∈**R**. Considerăm integrala

$$J=\int x^m(ax^n+b)^p dx \quad a,b\in R^*,\ n\neq 0,\ p\neq 0,\ x\in I\subset R_+^*$$

care reprezintă generalizarea integralei binome (*) de la m,n,p∈**Q** la m,n,p∈**R**.

În următoarele cazuri integrala J se calculează direct:

a) Dacă $p\in N^*$.

Aplicăm formula binomială a lui Newton, după care integrăm termen cu termen:

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx=\int x^m\sum_{i=0}^{p} C_p^i (ax^n)^i b^{p-i}dx=\sum_{i=0}^{p} C_p^i a^i\, b^{p-i}\int x^{m+ni}dx,$$

unde $$\int x^{m+ni}dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+ni+1}}{m+ni+1}+C, & dacă\ \ m+ni\neq -1 \\ \ln x+C, & dacă\ \ m+ni=-1\ . \end{cases}$$

b) Dacă $\dfrac{m+1}{n}\in N^*$.

În J efectuăm substituţia $ax^n+b=t$ conform (2) cu s=1, iar pentru integrala obţinută aplicăm punctul a).

c) Dacă $\dfrac{m+1}{n}+p\in N^*$.

În J efectuăm substituţia $\frac{ax^n+b}{x^a}=t$ conform (3) cu s=1, apoi pentru integrala obţinută aplicăm punctul a).

De exemplu, următoarea integrală se calculează cu uşurinţă pe baza punctului c):

$$\int\frac{1}{x(x^\alpha+1)^k}dx \quad \alpha\in\mathbb{R}^*, k\in\mathbb{N}^*, x>0$$

(Problema 20751*, G.M. 4/1986)

(Cazul k=3 în Matematika v Şkole, 1983 şi în G.M. 10/1984, problema nr. 20252*)

Soluţia publicată (G.M. 9/1985, pag.358) este recursivă.

Pentru a ilustra utilitatea **Observaţiei** 3, propunem cititorului să calculeze următoarele integrale:

$$\int x^{\sqrt{3}-2}(x^{\sqrt{3}-2}+1)^{\sqrt{3}-3}dx, \quad x>0$$

$$\int\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{6}}+1\right)^{\alpha}}dx, \quad x>0$$

$$\int\left(x^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}+1\right)^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}dx, \quad x>0$$

$$\int\frac{x^{nm-1}}{(x^n-1)^\alpha}dx, \quad n,m\in\mathbb{N}^*, \alpha\in\mathbb{R}^*, x>1 .$$

Menţionăm în final, că integralele

$$\int x^k\sqrt{(ax^2+b)^l}\,dx \quad k=0,\pm1,\pm2,\dots \qquad l=\pm1,\pm3,\pm5,\dots$$

pentru care [3] dă formule de recurenţă, în cazul $\frac{k+1}{2}\in\mathbb{N}^*$ sau $\frac{k+l+1}{2}\in-\mathbb{N}^*$, pe baza **Observaţiei** 3, pot fi calculate direct.

BIBLIOGRAFIE

1 BALÁZS,M.,KOLUMBÁN,J.: Matematikai analizis, Ed.Dacia Cluj 1978,pag.277-278.

2 NICOLESCU,M.: Analiză Matematică, Ed.Didactică şi Pedagogică Bucureşti 1980,Vol.I,pag.479-484.

3 TSYPKIN,A.G.,TSYPKIN,G.G.: Mathematical formulas,Mir Publishers Moscow 1988,pag.72-86.

REMARKS ON CHEBYSHEV'S SUBSTITUTIONS FOR INTEGRALS OF DIFFERENTIAL BINOMIALS

ABSTRACT. The well-known Chebyshev's substitutions (I,II,III) for integrals of the form

$$\mathfrak{S}=\int x^m(ax^n+b)^p dx \qquad \text{with } m,n,p\in Q$$

in analysis courses are presented in the chapter " Integration of Irrational Functions ".

In this note we use subtitutions I,II,III in case of

1) $m,n,p\in Z$, when the function appearing under the integral sign is rational ;

2) the integral $J=\int x^m(ax^n+b)^p\cdot f(x^n)\,dx$ where $m,n,p\in Q$ and f is an arbitrary rational function ;

3) $m,n,p\in \mathbb{R}$, if $p\in \mathbb{N}^*$ or $\frac{m+1}{n}\in \mathbb{N}^*$ or $\frac{m+1}{n}+p\in -\mathbb{N}^*$.

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr.76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA