Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
vol.3(1993-1994),105-110

ASUPRA UNOR PROBLEME DE CONCURS DIN GAZETA MATEMATICĂ

MOTTO:

"....,şi fiecare adevăr pe care îl găseam servindu-mi apoi drept regulă pentru găsirea altora,..."

(Descartes-Discurs asupra metodei)

Teodor LUCUŞ

Scopul acestei note este de a rezolva două probleme de concurs din Gazeta Matematică, alăturându-le alte două probleme din manualele şcolare, pentru a scoate în evidenţă cât este de importantă preluarea, transpunerea sau adaptarea unor idei sau metode de rezolvare pe care le-am întâlnit la alte probleme rezolvate anterior. Vom rezolva problemele următoare:

PROBLEMA 1. Să se afle măsurile unghiurilor făcute de diagonala BD a trapezului ABCD(AB∥CD) cu AD şi CD ştiind că $m(\widehat{ACB})=m(\widehat{ACD})=20°$ şi $m(\widehat{ADC})=80°$

(Problema C:918,G.M.nr.7/1989 autor Marius Crainic, elev Alba Iulia).

PROBLEMA 2. În interiorul triunghiului ABC cu AB=AC şi $m(\widehat{A})=100°$, se consideră punctul D astfel ca $m(\widehat{DBC})=30°$ şi $m(\widehat{DCB})=20°$.
Aflaţi $m(\widehat{BAD})$.

[(Problema C:1529,Gazeta Matematică nr.5/1994,autor Mihai Victor Dragomirescu, elev,Bucureşti)].

Când eu am pornit să rezolv problemele de mai sus, fiecare la timpul potrivit, mi-am amintit soluțiile următoarelor probleme care au fost sau sunt expuse în manualele școlare.

PROBLEMA 3.Se dă un triunghi ABC, $m(\hat{A})=20^\circ$, $(AB)=(AC)$.
Se duc segmentele AM, $M\in(AC)$ și CN, $N\in(AB)$ astfel încât $m(\widehat{ABM})=20^\circ$ și $m(\widehat{ACN})=30^\circ$.Să se afle $m(\widehat{AMN})$.

([1],pag.9,problema 30;[5])

PROBLEMA 4.Se dă un pătrat ABCD și M aparține interiorului pătratului ABCD astfel încât $m(\widehat{MCD})=m(\widehat{MDC})=15^\circ$.
Să se arate că triunghiul ABM este echilateral.
Prima problemă se găsea în manualul de geometrie clasa a VI -a și a doua se găsește în manualul de geometrie de clasa a IX-a.

([2] pag.50 , problema nr.3)

Voi da mai jos soluțiile celor patru probleme însoțite de comentariile de rigoare

Soluția 1.

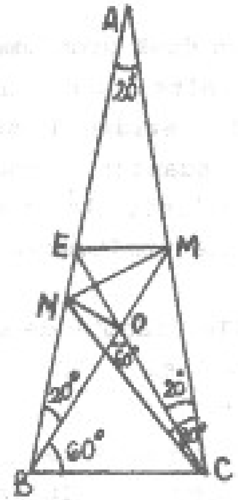

fig.1

În figura dată în ipoteză construim EC a.i.$m(\widehat{ECA})=20^\circ$.Se observă că ΔOBC echilateral ,deci $(OB)=(OC)=(BC)$ și la fel ΔBNC isoscel pentru că $m(\widehat{BNC})=m(\widehat{NCB})=50^\circ$,de unde rezultă că: $(BN)=(BC)$.Din congruențele de mai sus rezultă că $(BN)=(BO)$ și de unde rezultă că ΔBON isoscel și deci $m(\widehat{BNO})=m(\widehat{BON})=80^\circ$, dar $m(\widehat{BOC})=60^\circ$ și de unde $m(\widehat{EON})=40^\circ$.
Printr-un calcul simplu în ΔBEC rezultă că și $m(\widehat{NEO})=40^\circ$.Deci ΔENO- isoscel, iar ΔOME echilateral.

Analizând triunghiurile MEN și MON se arată că ele sunt congruente, de unde obținem că MN bisectoare a unghiului ENO, unghi care are măsura de 100°. Deci $m(\widehat{ANM})=50^\circ$,iar $m(\widehat{AMN})=110^\circ$.

Cu multă răbdare se pot obține și alte soluții la această problemă, dar se observă necesitatea construcțiilor ajutătoare.

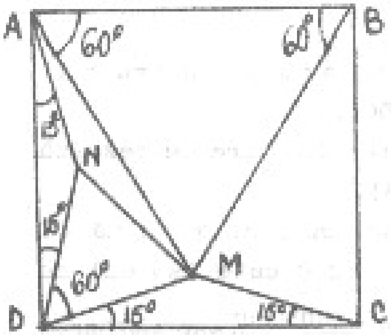

fig.2

Soluția acestei probleme am elaborat-o construind încă un triunghi AND congruent cu triunghiul DMC și astfel se poate arăta că și triunghiul AMN este congruent cu cele de mai sus și obținem $m(\widehat{DAM})=60°$, ceea ce ne conduce ușor la faptul că triunghiul AMB este echilateral.

O altă soluție la această problemă se poate face pe baze trigonometrice calculând înălțimea din M a triunghiului MAB în funcție de latura pătratului.

Modelând analog aceste idei de construcții ajutătoare, pentru problema C:918 vom obține:

Din analiza figurii date se obține că triunghiul ACD este isoscel cu $m(\widehat{DAC})=80°$ și triunghiul ABC isoscel cu $m(\widehat{ABC})=140°$. Construim un triunghi DB′C isoscel, în exteriorul trapezului, congruent cu triunghiul ABC (fig.3). Astfel se obține că triunghiul BCB′ este un triunghi echilateral și deci $m(\widehat{BB'C})=140°-60°=80°$ și $(BB')=(DB')$ care ne spune că triunghiul BB′D este isoscel și de unde obținem că $m(\widehat{BDB'})=50°$. Atunci $m(\widehat{BDC})=50°-20°=30°$ și $m(\widehat{ADB})=80°-30°=50°$ ceea ce reprezintă răspunsul la întrebările problemei puse. Soluția de față este la nivelul clasei a VI-a și problema este pusă la nivelul claselor a VII-a și a VIII-a, deci se așteaptă soluții și la acest nivel.

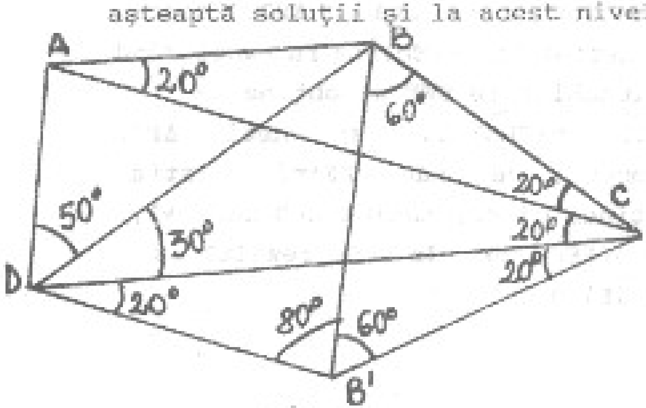

fig.3.

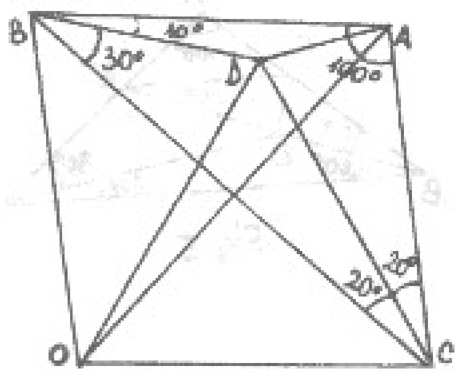

fig.4

În figura dată în ipoteza problemei C.1529 am mai construit şi centrul cercului circumscris triunghiului BDC,O.
Analizând figura 4 obţinem că ΔODC echilateral, din care ne rezultă că $(OC)\equiv(OD)\equiv(CD)\equiv(OB)$ şi $m(\widehat{BOD})=40^\circ=2\ m(\widehat{DCB})$.
Deci se observă că $m(\widehat{BOC})=60^\circ+40^\circ=100^\circ$ şi de unde ne rezultă că $\Delta ABC\equiv\Delta OBC$, şi apoi că $(DC)\equiv(AC)$, care ne dă că ΔCAD este isoscel cu $m(\widehat{ACD})=20^\circ$. Atunci vom putea calcula $m(ADC)=\dfrac{180^\circ-20^\circ}{2}=80^\circ=m(DAC)$ şi de unde se obţine $m(\widehat{BAD})=180^\circ-m(\widehat{DAC})=180^\circ-80^\circ=20^\circ$.

O altă soluţie se poate construi la nivelul clasei a IX-a folosind teorema sinusului în ΔBDC, din care se obţine că ΔCAD este isoscel. Se observă că analizând toate aceste probleme au o caracteristică comună, necesită construcţii ajutătoare şi multă creativitate în raţionament.

Dacă în problema C.1529 modificăm ipotezele, adică se dă : $m(\widehat{DBC})=20^\circ$ şi $m(\widehat{DCB})=10^\circ$ atunci se poate cere să se afle m(BAD)
Soluţia acestei noi probleme este mai uşoară, deşi problema pare echivalentă cu cea dată iniţial.

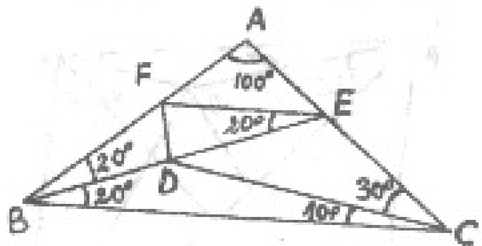

Fig.5

Fie $BD\cap AC=\{E\}$ şi $EF\parallel BC$, $F\in(AB)$.
Analizând triunghiul EDC se obţine că $m(EDC)=20^\circ+10^\circ=30^\circ$, fiind un unghi exterior. Se observă că ΔEDC isoscel şi astfel $(EC)\equiv(ED)$. La fel analizând triunghiurile BFE se obţine că $m(\widehat{FBE})=m(\widehat{FEB})=20^\circ$ şi deci ΔFBE isoscel, de unde $(EF)\equiv(FB)$. Astfel obţinem că triunghiul EFD isoscel, cu $m(\widehat{FED})=20^\circ$, de unde rezultă că $m(\widehat{DFE})=80^\circ$.

fig.5.

Din triunghiul BEC ne rezultă că $m(BEC)=120^\circ$ şi deci $m(AED)=60^\circ$ şi împreună cu relația $m(\widehat{AFE})=40°$, ne rezultă că patrulaterul AEDF inscriptibil și deci $m(\widehat{DAE})=80°$ și astfel $m(\widehat{BAD})=100°-80°=20°$.

BIBLIOGRAFIE

1.M.,PIMSNER,S.,POPA Probleme de geometrie elementară Editura Didactică și Pedagogică ,București,1979.

2.A.,COTA,M.,RĂDUȚIU,M.,RADO,F.,VORNICESCU,Geometrie și Trigonometrie, Manual pentru clasa IX-a,Editura Didactică și Pedagogică,R.A.București, 1992.

3.GAZETA MATEMATICĂ, seria B, 1980 - 1994.

4.E.,RUSU, Geometrie elementară, Editura didactică și Pedagogică București,1964

SUR QUEQUES PROBLÈMES DE CONCURS DE " GAZETA MATEMATICĂ "

RÉSUMÉ.Dans cet ouvrage on donne des solutions aux problèmes C 918, G.M. nr.7/ 1989; C 1529 G.M.nr.5 /1994, exposés ci-dessus par la méthode des constructions auxiliaires.
Les problèmes ci-dessus sont analysés et résolus comparativement aux problèmes des manuels scolaires et aux ceritains problèmes des recueils de problèmes.
On met en évidence l'utilité de la construction des lignes auxiliaires à la figure donnée et leur emploi dans le contexte.

Dans l'ouvrage on fait également une comparaison des méthodes, au niveau des petits élèves aussi que des grands, en utilisant plus de notions de mathématiques.

Du point de vue de la méthode pédagogique je me suis préoccupé que les problémes en question soient résolus par les élèves auxquels ceux-ci s'adressaient.

Liceul " Vasile Lucaciu " Baia Mare
Str. Culturii nr.2
4800 Baia Mare
ROMÂNIA