Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.4(1994-1995), 1-6

O PROBLEMĂ INTERESANTĂ DE DIVIZIBILITATE

Vasile BERINDE

În urmă cu câţiva ani, într-o emisiune radiofonică a programului 3 a fost propusă ascultătorilor o problemă de divizibilitate deosebit de interesantă:

P1. *Determinaţi un număr N astfel încât $N \cdot 8888$ să fie alcătuit din toate cifrele sistemului zecimal, luate o singură dată.*

Pornind de la ideea acestei probleme, am propus în Gazeta Matematică, o problemă înrudită.

P2. *Să se afle un număr n astfel încât $n \cdot 9999$ să fie scris cu toate cifrele sistemului zecimal luate o singură dată.*

Din păcate problema - apărută în Gazeta Matematică 4/1993, cu numărul O.G.160 - are enunţul afectat de o greşeală de tipar, care înlocuieşte pe 9999 cu 1999.

Erata, apărută în Gazeta Matematică 3/1994, a ajuns târziu la cititori astfel că aceştia au încercat să rezolve problema - mult mai dificilă - care cerea *să se determine numărul n pentru care*

$n\cdot 1999$ este scris cu toate cifrele sistemului zecimal,luate o singură dată. În [3],Titu Zvonaru propune o soluţie obţinută cu calculatorul, care are meritul de a furniza, în plus şi pătratele perfecte care se scriu cu toate cifrele sistemului zecimal, luate o singură dată.

Nota de faţă îşi propune ca,rezolvând problema P1, să indice cum poate fi rezolvată problema P2, în forma sa iniţială.Vom folosi doar câteva criterii de divizibilitate, ceea ce va justifica includerea ei la rubrica Olimpiada pentru gimnaziu.

Problema P1 poate fi reformulată astfel: *să se determine un număr natural scris cu zece cifre distincte, luate o singură dată astfel incât acesta să fie divizibil cu 8888.*

Vom aborda problema în această formulare şi fie

$$n=\overline{a_1a_2\ldots a_{10}} \tag{1}$$

numărul căutat

Deoarece $8888=2^3\cdot 11\cdot 101$,vom avea nevoie de criterii de divizibilitate ale lui n cu 8,11 şi 101, pe care le vom deduce în continuare, având în vedere faptul că manualele de clasa a V-a [1] şi a VI-a [2] nu includ nici unul dintre aceste criterii.

PROPOZIŢIA 1.*Fie n un număr natural de forma (1).Atunci*

1) Numărul n se divide cu 8 dacă şi numai dacă numărul

$$N_1=4a_8+2a_9+a_{10}$$

se divide cu 8;

2) Numărul n se divide cu 11 dacă şi numai dacă numărul

$$N_2=a_1+a_3+a_5+a_7+a_9-(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})$$

se divide cu 11;

3) Numărul n se divide cu 101 dacă şi numai dacă numărul

$$N_3=10(a_1-a_3+a_5-a_7+a_9)+a_2-a_4+a_6-a_8+a_{10}$$

se divide cu 101.

Demonstraţie. Scriem numărul n astfel

$$n=1000\cdot\overline{a_1a_2\ldots a_7}+a_8\cdot 10^2+a_9\cdot 10+a_{10}=8\cdot 125\cdot\overline{a_1a_2\ldots a_7}+$$

$$+(96+4)\cdot a_8+(8+2)\cdot a_9+a_{10}=M8+4a_8+2a_9+a_{10},$$

de unde rezultă tocmai afirmaţia 1).

Deoarece $10=11-1$ şi $10^2=9\cdot 11+1$ vom scrie

$$n=10^2\cdot\overline{a_1a_2\ldots a_8}+a_9\cdot 10+a_{10}=M11+\overline{a_1a_2\ldots a_8}-a_9+a_{10}=$$

$$=M11+10^2\cdot\overline{a_1a_2\ldots a_6}+10\cdot a_7+a_8-a_9+a_{10}=$$

$$=M11+10^2\cdot\overline{a_1a_2\ldots a_6}-a_7+a_8-a_9+a_{10}=\ldots$$

$$\ldots=M11+a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots-a_9+a_{10},$$

de unde deducem afirmaţia 2)

Întrucât $10^2=101-1$, vom scrie

$$n=10^2\overline{a_1a_2\ldots a_8}+10\cdot a_9+a_{10}=(101-1)\cdot\overline{a_1a_2\ldots a_8}+10\cdot a_9+a_{10}=$$

$$=M101-\overline{a_1a_2\ldots a_8}+10\cdot a_9+a_{10}=M101-10^2\cdot\overline{a_1a_2\ldots a_6}-$$

$$-10a_7-a_8+10a_9+a_{10}=\ldots$$

$$=M101+10(a_1-a_3+a_5-a_7+a_9)+a_2-a_4+a_6-a_8+a_{10},$$

de unde obţinem relaţia 3).

Propoziţia este complet demonstrată.

Observaţie. Este uşor de văzut că afirmaţia 1)rămâne adevărată şi pentru un număr natural de k cifre, iar 2) şi 3) pot fi de asemenea generalizate.

Trecem acum la rezolvarea problemei P1. Introducem notaţiile

$$n_1=a_1+a_3+a_5+a_7+a_9,$$
$$n_2=a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10},$$
$$n_3=a_1-a_3+a_5-a_7+a_9,$$
$$n_4=a_2-a_4+a_6-a_8+a_{10}.$$

Deoarece, în condiţiile problemei cifrele $a_1, a_2,\ldots,a_{10}$ aparţin mulţimii $\{0,1,2,\ldots,9\}$ şi sunt distincte, vom avea în mod necesar $a_1+a_2+\ldots+a_{10}=n_1+n_2=45=0+1+2+\ldots+9$, rezultă că numărul $N_2=n_1-n_2$ este în mod necesar impar,ceea ce restrânge valorile lui N_2 doar la

$$N_2\in\{-11,\ 11\}\ .$$

pentru ca numărul n dat de (1)să se dividă cu 11 (am aplicat criteriul 2))

Pentru $N_2=-11$, adică $n_2-n_1=11$, obţinem $n_1=17$ şi $n_2=28$, iar pentru

$n_1-n_2=11$, obţinem $n_1=28$ şi $n_2=17$.Tratăm primul caz.

Este deci nevoie să scriem mulţimea cifrelor sistemului zecimal ca reuniune a două mulţimi M_1 şi M_2 astfel încât suma elementelor lui M_1 să fie 17 iar suma elementelor mulţimii M_2 să fie 28.Dintre numeroasele descompuneri de acest tip, noi vom folosi următoarea:

$$M_1=\{1,2,3,5,6\}, \qquad M_2=\{0,4,7,8,9\}.$$

Să valorificăm acum condiţia 3). Deoarece

$$n_3=n_1-2(a_3+a_7) \text{ şi } n_4=n_2-2(a_4+a_6), \tag{2}$$

iar $n_1,n_2\in\{17,28\}$, deducem uşor că

$$-17\le n_3,\ n_4\le 26,$$

aşadar

$$N_3\le 26\cdot 10+26,$$

ceea ce ne asigură că singurele valori admise pentru N_3 sunt date de

$$N_3\in\{-101,101,202\}.$$

Relaţiile (2) ne arată că n_1 şi n_3 ,respectiv n_2 şi n_4 au aceeaşi paritate, deci, când luăm $N_3=101$, spre exemplu, descompunerea

$$101=10\cdot n_3+n_4$$

impune n_4 impar, adică $n_2=17$, apoi $n_1=28$ şi n_3 număr par. Din aceleaşi relaţii (2) obţinem acum pentru $n_3=10$ şi $n_4=1$

$$a_3+a_7=\frac{28-10}{2}=9 \quad \text{şi} \quad a_4+a_6=\frac{17-1}{2}=8$$

Întrucât $n_1=28$ şi $n_2=17$ vom căuta $a_1,a_3,...,a_9$ în M_2 şi $a_2,a_4,...,a_{10}$ în M_1.

Pentru descompunerea aleasă de noi anterior, rezultă

$$a_3,a_7\in\{0,9\} \text{ şi } a_4,a_6\in\{3,5\}.$$

Aşadar $a_9\in\{4,7,8\}$ şi $a_{10}\in\{2,6\}$, căci a_{10} trebuie să fie număr par. Condiţia 1) este verificată de

$$a_6=3,\ a_9=7 \text{ şi } a_{10}=6,$$

şi rezultă $a_4=5,\ a_2,a_6\in\{1,2\},\ a_1,a_5\in\{4,8\}$.

Luăm $a_3=0$, $a_7=9$, $a_2=1$, $a_6=2$, $a_1=4$, $a_5=8$ şi obţinem soluţia

$$n = 4105829376$$

pentru care avem

$$4105829376 = 8888 \cdot 461952$$

deci $N = 461952$.

Sugerăm cititorilor să încerce:

1° Rezolvarea problemei P2 prin metoda expusă pentru problema P1;

2° Găsirea altor metode de rezolvare a problemei P1 şi P2;

3° Determinarea numărului soluţiilor problemei P1 (P2);

4° Enunţarea şi rezolvarea altor probleme de acelaşi tip,lucrând deci cu $\overline{aaaa}, a\neq 8$,în loc de 8888, ş.a.

BIBLIOGRAFIE

1.POPOVICI,C.P.,ş.a.- Matematică, Manual pentru clasa a V-a, Eitura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1986.

2.POPOVICI,C.P. şi LIGOR, I.C.- Matematică: Aritmetică. Algebră, Manual pentru clasa a VI-a, Editura Didactică şi Pedagogică, 1985.

3.ZVONARU,T. - Asupra problemei O.G.:160 din G.M. 4/1993, Gazeta Matematică, Anul IC, Nr.11/1994, 503-505.

AN INTERESTING PROBLEM OF DIVISIBILITY

ABSTRACT. In this note we give a complete solution to a very interesting problem on divisibility:

Find an integer N such that the number N·8888 has exactly ten distinct figures (in the decimal representation).

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr.76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA