Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
VOL.4(1994-1995), 7-36

CRITERII DE DIVIZIBILITATE CU NUMERE AVÂND TERMINAŢIA ÎN 1,3,7 ŞI 9

Vasile TULBA şi Eudochia TULBA.

În prezenta lucrare am formulat şi demonstrat opt teoreme care reprezintă criterii de divizibilitate cu numere de forma $\overline{a1}, \overline{a3}, \overline{a7}$ *si* $\overline{a9}$ (numere având terminaţia în 1,3,7 şi 9).
În demonstrarea acestor teoreme am folosit principiul suprimării ultimei cifre, ultimelor două,..., ultimelor n cifre ale numărului A pe care îl testăm.
Pornind de la criteriile de divizibilitate cunoscute şi din dorinţa de a afla şi altele am reuşit să descoperim reguli de divizibilitate pentru orice număr prim sau neprim şi să le generalizăm.Generalizările făcute ne permit să formulăm,deci,pentru fiecare număr prim, o dublă infinitate de criterii.Din mulţimea criteriilor corespunzătoare pentru acelaşi număr prim,putem alege un criteriu convenabil, în funcţie de numărul la care îl aplicăm, astfel încât să ne permită o decizie cât mai rapidă.
Testarea unui număr A dacă este sau nu divizibil cu un număr dat "a" se poate face, aplicând prin repetare, de la început până la decizia finală a unui singur algoritm sau aplicând mai mulţi algoritmi, începând cu cei mai rapizi şi continuând cu algoritmi din ce în ce mai lenţi(în principiu, se aplică înjumătăţirea numărului).

Fie $A=\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_3 a_2 a_1 a_0}$ un număr de (n+1) cifre.
Notaţii:

$\frac{A-a_0}{10}=(A-a_0)\cdot 10^{-1}$ -numărului A i-am suprimat ultima cifră.

$$\frac{A-\overline{a_1a_0}}{100}=(A-\overline{a_1a_0})\cdot 10^{-2}$$ -numărului A i-am suprimat ultimele două cifre

.
.
.

$$\frac{A-\overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0}}{10^n}=\frac{A-A_n}{10^n}=(A-A_n)\cdot 10^{-n}$$ -numărului A i-am suprimat ultimele n cifre.

$A_1=a_0,\ A_2=\overline{a_1a_0},\ A_3=\overline{a_2a_1a_0},\ A_n=\overline{a_3a_2a_1a_0},\ \ldots$

La teoremele 1,4,5,şi 7 respectiv la aplicarea algoritmilor corespunzători acestor teoreme diferenţele se vor lua în modul.

Se consideră cunoscută teorema:

Dacă $a\cdot b|A$, atunci $a|A$ şi $b|A$.

Cazul numerelor pare sau al celor cu terminaţia în 5 poate fi redus la cazul celor studiate de noi(cu excepţia puterilor perfecte a lui 2 şi a lui 5).

§.1.CRITERIUL GENERAL DE DIVIZIBILITATE CU NUMERE AVÂND TERMINAŢIA ÎN 1

(de forma $\overline{a1}$ unde"a"poate fi cifră sau un număr de mai multe cifre).

Fie $A=\overline{a_na_{n-1}a_{n-2}\ldots a_2a_1a_0}$ un număr de (n+1) cifre.

Teorema 1. *Numărul $\overline{a1}$ divide pe A dacă şi numai dacă suprimându-i lui A ultima cifră şi scăzând din numărul rămas produsul $\overline{a}\cdot a_0$, se obţine un număr divizibil cu $\overline{a1}$.*

Demonstraţie: $\overline{a1}\ |A \Leftrightarrow \overline{a1}\ \|\frac{A-a_0}{10}-\overline{a}\cdot a_0|$

a)Dacă $\overline{a1}||\frac{A-a_0}{10}-\overline{a}\cdot a_0|$ *atunci* $\frac{A-a_0}{10}-\overline{a}\cdot a_0=\overline{a1}\cdot k,\ \ k\in\mathbb{N}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A-a_0-10\overline{a}\cdot a_0=10k\cdot\overline{a1} \Leftrightarrow A-a_0\cdot(10\overline{a}+1)=10k\cdot\overline{a1} \Leftrightarrow A=10k\cdot\overline{a1}+$

$+a_0\cdot\overline{a1} \Leftrightarrow A=\overline{a1}\cdot(10k+a_0) \Leftrightarrow \overline{a1}\,|\,A$

b)Să dovedim implicaţia inversă:
Dacă

$$\overline{a1}\ |\ A,\ atunci\ A=\overline{a1}\cdot k,\ k\in\mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{a}\cdot a_0=\frac{\overline{a1}\cdot k-a_0}{10}-\overline{a}\cdot a_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{a}\cdot a_0=\frac{\overline{a1}\cdot k-a_0-10\overline{a}\cdot a_0}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{a}\cdot a_0=\frac{\overline{a1}\cdot k-a_0\cdot(10\overline{a}+1)}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{a}\cdot a_0=\frac{\overline{a1}\cdot k-a_0-\overline{a1}}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{a}\cdot a_0=\overline{a1}\cdot\frac{k-a_0}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{a1}\ ||\frac{A-a_0}{10}-\overline{a}\cdot a_0\ |$$

Din $\overline{a1}\ |\ A$ şi $\overline{a1}\ ||\ \frac{A-a_0}{10}-\overline{a}\cdot a_0$ rezultă că:

$$\overline{a1}\ |\ A \Leftrightarrow \overline{a1}\,||\frac{A-a_0}{10}-\overline{a}\cdot a_0\ |$$

Observaţia 1. Numerelor de forma: $\overline{a01},\overline{a001},\overline{a001},\ldots,$ li se pot formula criterii asemănătoare şi suprimându-i lui A două,trei, patru,..., cifre.Demonstraţiile acestora sunt asemănătoare cu cea folosită la teorema 1.

Observaţia 2. Numerelor cu terminaţia în 1 (de forma $\overline{a1}$)le putem formula şi criterii de tipul teoremei 2.
Exemple de criterii de divizibilitate cu 11.

1). $11\ |A \Leftrightarrow 11\ ||\frac{A-a_0}{10}-a_0\ |$; 2). $11\ ||\ \frac{A-\overline{a_1a_0}}{100}-10\overline{a_1a_0}\,| \Leftrightarrow 11\ |\ A$

3). $11|A \Leftrightarrow 11||\frac{A-\overline{a_2a_1a_0}}{1000}-\overline{a_2a_1a_0}|$ 4). $11|\ A \Leftrightarrow 11||\frac{A-\overline{a_3a_2a_1a_0}}{10000}-10\overline{a_3a_2a_1a_0}\,|$

Notaţii: $\overline{a_4a_3a_2a_1a_0}=A_{4+1};\ deci\ A_1=a_0;A_2=\overline{a_1a_0};A_3=\overline{a_2a_1a_0}$

5). $11\ |\ A \Leftrightarrow 11\ ||\frac{A-A_5}{10^5}-A_5|$; 6). $11\ |\ A \Leftrightarrow 11\ ||\frac{A-A_6}{10^6}-10A_6|$;

7). $11 \mid A \Leftrightarrow 11 \mid |(A-A_7)\cdot 10^{-7}-A_7|$; 8). $11 \mid A \Leftrightarrow 11 \mid |(A-A_8)\cdot 10^{-8}-10A_8|$;

9). $11 \mid A \Leftrightarrow 11 \mid |(A-A_9)\cdot 10^{-9}|$; 10) $11 \mid A \Leftrightarrow 11 \mid |(A-A_{10})\cdot 10^{-10}-10A_{10}|$

Interpretarea exemplului 7).

Un număr A se divide cu 11, dacă şi numai dacă, suprimându-i lui A ultimele şapte cifre şi scăzând din numărul rămas gruparea suprimată,se obţine un număr divizibil cu 11,

Interpretarea exemplului 4)

Numărul 11 divide pe A, dacă şi numai dacă, suprimându-i lui A ultimele patru cifre şi scăzând din numărul rămas produsul dintre 10 şi gruparea suprimată, se obţine un număr divizibil cu 11.
Exemple de criterii de divizibilitate cu 31:

1) $31 \mid A \Leftrightarrow 31 \mid |(A-A_1)\cdot 10^{-1}-3A_1|$; 2) $31 \mid |(A-A_2)\cdot 10^{-2}-22A_2| \Leftrightarrow 31|A$

3) $31 \mid A \Leftrightarrow 31 \mid |(A-A_3)\cdot 10^{-3}-27A_3|$; 4) $31 \mid |(A-A_4)\cdot 10^{-4}-12A_4| \Leftrightarrow 31|A$

5) $31|A \Leftrightarrow 31 \mid |(A-A_5)\cdot 10^{-5}-26A_5|$; 6) $31 \mid |(A-A_6)\cdot 10^{-6}-15A_6| \Leftrightarrow 31A$

7) $31|A \Leftrightarrow 31 \mid |(A-A_{10})\cdot 10^{-10}-6A_{10}|$.

Interpretarea exemplului 1)

Numărul 31 divide pe A, dacă şi numai dacă, suprimându-i lui A ultima cifră şi scăzând din numărul rămas produsul dintre 3 şi cifra suprimată, se obţine un număr divizibil cu 31.

Interpretarea exemplului 7).

Numărul 31 divide pe A , dacă şi numai dacă, suprimându-i lui A ultimele 10 cifre şi scăzând din numărul rămas produsul dintre 6 şi gruparea suprimată, se obține un număr divizibil cu 31.

Exemple de criterii de divizibilitate cu 41:

1) $41|A \Leftrightarrow 41||(A-A_1)\cdot 10^{-1}-4A_1|$; 2) $41||(A-A_2)\cdot 10^{-2}-25A_2|$;

3) $41|A \Leftrightarrow 41||(A-A_6)\cdot 10^{-6}-4A_6|$; 4) $41||(A-A_{10})\cdot 10^{-10}-40A_{10}|$

Exemple de criterii de divizibilitate cu 61:

1) $61|A \Leftrightarrow 61||(A-A_1)\cdot 10^{-1}-6A_1|$; 2) $61|A \Leftrightarrow 61||(A-A_2)\cdot 10^{-2}-25A_2|$;

3) $61|A \Leftrightarrow 61||(A-A_7)\cdot 10^{-7}-7A_7|$; 4) $61|A \Leftrightarrow 61||(A-A_9)\cdot 10^{-9}-8A_9|$;

Exemple de criterii de divizibilitate cu 71:

1) $71|A \Leftrightarrow 71||(A-A_1)\cdot 10^{-1}-7A_1|$; 2) $71|A \Leftrightarrow 71||(A-A_2)\cdot 10^{-2}-22A_2|$;

3) $71|A \Leftrightarrow 71||(A-A_5)\cdot 10^{-5}-51A_5|$; 4) $71|A \Leftrightarrow 71||(A-A_8)\cdot 10^{-8}-44A_8|$;

5) $11|A \Leftrightarrow 11|((A-A_{20})\cdot 10^{-20}-A_{20})$; 6) $31|A \Leftrightarrow 31||(A-A_{15})\cdot 10^{-16}-3A_{16}|$;

7) $41|A \Leftrightarrow 41|((A-A_{15})\cdot 10^{-15}-A_{15})$; 8) $61|A \Leftrightarrow 61||((A-A_{16})\cdot 10^{-16}-5A_{16})|$;

9) $71|A \Leftrightarrow 71|((A-A_{17})\cdot 10^{-17}+9A_{17})$; 10) $101|A \Leftrightarrow 101||(A-A_{20})\cdot 10^{-20}-100A_{20}|$;

Aplicații:

1)a)Fie numărul A=5678163.

Să-l testăm cu 11

5678-1.163=5515

$|55-10\cdot 15|=95$

$95 \nmid 11$

deci $11 \nmid A$

Suprimăm ultimele 3 cifre și scădem din 5678 pe 1.163 și obținem 5515. Suprimăm ultimele două cifre și scădem din 55 pe 10•15 și obținem 95 (diferența am luat-o în modul).

Despre 95 știm că nu se divide cu 11,deci nici A nu se divide cu 11,sau

b) $11|A \Leftrightarrow 11||5678-1\cdot 163| \Leftrightarrow 11||55-10\cdot 15 \Leftrightarrow 11||95$ propoziție falsă,deci $11 \nmid A$, sau, cu ajutorul congruențelor, putem scrie:

c)$5678-1.163=5515\equiv(55-10\cdot15)(\text{modulo } 11)=95\equiv7$ (modulo 11) $\Rightarrow 11\nmid A$, sau

d)așezate aceste calcule într-o schemă arată astfel:

A⋮11?	P_1	P_2	P_3	P_4
A=5678163	5678- 163 ----- 5515	55- 150 ----- |-95|	$11\nmid 95$	$11\nmid A$

sau

e)așezate aceste calcule într-o altă schemă, arată în felul următor:

$$\begin{array}{l} -5678\overline{163} \\ \;\;\underline{163} \\ \;\;\;55\overline{15} \\ -\underline{150} \\ |-95| \nmid 11 \end{array} \qquad \text{deci } 11 \nmid A$$

Gruparea suprimată am marcat-o cu o bară deasupra și se aplică pașii precedenți.

2)Fie numărul A=60000000001.Să-l testăm dacă este divizibil cu 31.

$$\begin{array}{l} 6-6.\overline{0000000001}=0 \\ 0 \vdots 31 \quad \textit{deci } 31|A \end{array}$$

.Suprimându-i lui A ultimele 10 cifre și scăzând din 6(numărul rămas) pe 6.0000000001 obținem 0,deci 31|A.

Tot la acest exemplu testarea se putea face și cu algoritmi mai lenți, sau aplicând schema:

$$\begin{array}{l} 6\overline{0000000001} \\ \underline{-6} \\ \overline{0} \vdots 31, \end{array} \qquad \text{deci } 31|A$$

Gruparea suprimată am marcat-o cu o bară deasupra.

3)Fie numărul A=980023.

Să-l testăm cu 41

$$\begin{array}{l} 980-23\cdot\overline{023}=451 \\ \;45-4\cdot1=41 \\ \;\;\;41 \vdots 41 \end{array} \qquad \text{deci, } 41|A$$

Suprimăm ultimele 3 cifre numărului A și scădem din 980 (numărul rămas), produsul dintre 23 (din tabelă) și gruparea suprimată 023, obținem 451. Suprimând ultima cifră pe 1 și scăzând din 45 (numărul rămas), produsul dintre 4 (din tabelă) și 1 (cifra suprimată), obținem 41.
Deci, 41⋮41, adică $41|A$

§2. CRITERIUL GENERAL DE DIVIZIBILITATE CU NUMERE AVÂND TERMINAȚIA ÎN 9

(de forma $\overline{a9}$ unde" a "poate fi cifră sau un număr de mai multe cifre)

Fie $A=\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_2 a_1 a_0}$ un număr de (n+1) cifre.

Teorema 2. *Un număr de forma $\overline{a9}$ divide pe A dacă și numai dacă, suprimându-i lui A ultima cifră și adunând numărului rămas produsul $(\overline{a}+1)\cdot a_0$, se obține un număr divizibil cu $\overline{a9}$.*

Demonstrație: $\overline{a9}\mid A \leftrightarrow \overline{a9}\mid\left(\frac{A-a_0}{10}+(\overline{a}+1)\cdot a_0\right)$

a) Dacă $\overline{a9}\mid\left(\frac{A-a_0}{10}+(\overline{a}+1)\cdot a_0\right)$, atunci $\frac{A-a_0}{10}+(\overline{a}+1)\cdot a_0=\overline{a9}\cdot k,\ k\in\mathbb{N}\leftrightarrow$

$\leftrightarrow A-a_0+10\overline{a}\cdot a_0+10a_0=10k\cdot\overline{a9}\leftrightarrow A+10\overline{a}\cdot a_0+9a_0=10k\cdot\overline{a9}\leftrightarrow$

$\leftrightarrow A+a_0\cdot(10\overline{a}+9)=10k\cdot\overline{a9}\leftrightarrow A+\overline{a9}\cdot a_0=10k\cdot\overline{a9}\leftrightarrow A=10k\cdot\overline{a9}-a9\cdot a_0\leftrightarrow$

$\leftrightarrow A=\overline{a9}\cdot(10k-a_0)\leftrightarrow \overline{a9}|A.$

b) Dacă $\overline{a9}\mid A$, atunci $A=\overline{a9}\cdot k,\ k\in\mathbb{N}\leftrightarrow\frac{A-a_0}{10}+(\overline{a}+1)\cdot a_0=$

$=\frac{\overline{a9}-a_0}{10}+(\overline{a}+1)\cdot a_0\leftrightarrow\frac{A-a_0}{10}+(\overline{a}+1)\cdot a_0=\frac{\overline{a9}\cdot k-a_0+10\overline{a}\cdot a_0+10a_0}{10}\leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(\overline{a}+1)\cdot a_0=\frac{\overline{a9}\cdot k+10\overline{a}\cdot a_0+9a_0}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(\overline{a}+1)\cdot a_0=$$

$$=\frac{\overline{a9}\cdot k+a_0\cdot(10\overline{a}+9)}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(\overline{a}+1)\cdot a_0=\frac{\overline{a9}\cdot k+\overline{a9}\cdot a_0}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(\overline{a}+1)\cdot a_0=$$

$$=\overline{a9}\cdot\frac{k+a_0}{10} \Leftrightarrow \overline{a9}\mid\left(\frac{A-a_0}{1}+(\overline{a}+1)\cdot a_0\right).$$

Din a) şi b) rezultă echivalenţa.

Observaţia 3.

Numerelor de forma: $\overline{a99},\overline{a999},\overline{a9999},\ldots,$ li se pot formula criterii de divizibilitate asemănătoare şi suprimându-i lui A două, trei, patru,...,cifre, iar demonstraţiile lor sunt asemănătoare cu cea folosită la teorema 2.

Observaţia 4.

Numerelor cu terminaţia în 9 (de formă $\overline{a9}$)le putem formula şi criterii de tipul **teoremei** 1.

Exemple de criterii de divizibilitate cu 19:

1) $19\mid A \Leftrightarrow 19\mid\left(\frac{A-a_0}{10}+2a_0\right);$

$19\cdot1+1=2$

2) $19\mid A \Leftrightarrow 19\mid\left((A-A_2)10^{-2}+4A_2\right)$

$19\cdot21=399; \qquad 4=3+1$

3) $19\mid A \Leftrightarrow 19\mid\left((A-A_3)\cdot10^{-3}+8A_3\right);$

4) $19\mid A \Leftrightarrow 19\mid\left((A-A_4)\cdot10^{-4}+16A_4\right)$

Notaţie: $A_1=a_0;\ A_2=\overline{a_1a_0};\ A_3=\overline{a_2a_1a_0};\ A_4=\overline{a_3a_2a_1a_0},\ldots,$

5) $19\mid A \Leftrightarrow 19\mid\left((A-A_6)\cdot10^{-6}+7A_6\right);$

6) $19\mid A \Leftrightarrow 19\mid\left((A-A_8)\cdot10^{-8}+9A_8\right)$

Interpretarea exemplului 1):

Numărul 19 divide pe A,dacă şi numai dacă, suprimându-i lui A ultima cifră şi adunând numărului rămas produsul dintre 2 şi cifra suprimată, se obţine un număr divizibil cu 19.

Interpretarea exemplului 5):

Numărul 19 divide pe A,dacă şi numai dacă, suprimându-i lui A ultimele 6 cifre şi adunând numărului rămas produsul dintre 7 şi gruparea suprimată,se obţine un număr divizibil cu 19.

Exemple de criterii de divizibilitate cu 29:

1) $29|A \Leftrightarrow 29|((A-A_1)\cdot 10^{-1}+3A_1)$;

2) $29|A \Leftrightarrow (29|((A-A_2)\cdot 10^{-2}+9A_2)$;

3) $29|A \Leftrightarrow 29|((A-A_6)\cdot 10^{-6}+4A_6)$;

4) $29|A \Leftrightarrow 29|((A-A_8)\cdot 10^{-8}+7A_8)$;

5) $29|A \Leftrightarrow 29|((A-A_{10})\cdot 10^{-10}+5A_{10})$;

Interperetarea exemplului 1):

Numărul 29 divide pe A, dacă şi numai dacă, suprimându-i lui A ultima cifră şi adunând numărului rămas produsul dintre (2+1) şi cifra suprimată, se obţine un număr divizibil cu 29.

Interpretarea exemplului 5):

Numărul 29 divide pe A, dacă şi numai dacă, suprimându-i lui A ultimele 10 cifre şi adunând numărului rămas produsul dintre 5 şi gruparea suprimată, se obţine un număr divizibil cu 29.

Exemple de criterii de divizibilitate cu 59:

1) $59|A \Leftrightarrow 59|((A-A_1)\cdot 10^{-1}+6A_1)$;

2) $59|A \Leftrightarrow 59|((A-A_2)\cdot 10^{-2}+36A_2)$;

3) $59|A \Leftrightarrow 59|((A-A_7)\cdot 10^{-7}+40A_7)$;

4) $59|A \Leftrightarrow 59|((A-A_8)\cdot 10^{-8}+4A_8)$;

Exemple de criterii de divizibilitate cu 79:

1) $79|A \Leftrightarrow 79|((A-A_1)\cdot 10^{-1}+8A_1)$;

2) $79|A \Leftrightarrow 79|((A-A_2)\cdot 10^{-2}+64A_2)$;

3) $79|A \Leftrightarrow 79|((A-A_6)\cdot 10^{-6}+22A_6)$;

4) $79|A \Leftrightarrow 79|((A-A_{10})\cdot 10^{-6}+52A_{10})$;

Exemple de criterii de divizibilitate cu 89:

1) $89|A \Leftrightarrow 89|((A-A_1)\cdot 10^{-1}+9A_1)$;

2) $89|A \Leftrightarrow 89|((A-A_2)\cdot 10^{-2}+81A_2)$;

3) $89|A \Leftrightarrow 89|((A-A_7)\cdot 10^{-7}+20A_7)$;

4) $89|A \Leftrightarrow 89|((A-A_8)\cdot 10^{-8}+2A_8)$;

unde $A_1=a_0$; $A_2=\overline{a_1a_0}$; $A_3=\overline{a_2a_1a_0}$; $A_4=\overline{a_3a_2a_1a_0}$

Aplicaţii:

Fie numărul A=1323473.

13234+9.73=13891

138+9.91=957

95+3.7=116

11+3.6=29

29⋮29

Să-l testăm dacă este divizibil cu 29.

Suprimăm ultimele două cifre şi adunăm numărului rămas produsul dintre 9 şi 73, obţinem 13891.Suprimăm numărului obţinut ultimele două cifre şi adunăm numărului rămas produsul 9.91 şi obţinem 957. Suprimăm lui 957 ultima cifră şi adunăm numărului rămas produsul 3.6 şi obţinem 116.Mai suprimăm odată ultima cifră şi adunăm lui 11 produsul 3.6, obţinem 29.Despre 29 ştim că se divide cu 29,deci şi A⋮29,sau,

$$29|A \Leftrightarrow 29|(13234+9\cdot 73) \Leftrightarrow 29|(138+9\cdot 91) \Leftrightarrow 29|(95+3\cdot 7) \Leftrightarrow 29|(11+3\cdot 6) \Leftrightarrow 29|29$$

propoziţie adevărată, deci 29|A,sau

(13234+9.73)=13891≡(138+9.91)(modulo 29)=957≡(95+3.7)(modulo 29)= = 116≡(11+3.6)(modulo 29)=29≡0 (modulo 29) ⇔ 29|A, sau

aşezate aceste calcule într-o schemă, arată în felul următor:

$$\begin{array}{r}
13234\overline{73} \\
+\ \underline{657} \\
138\overline{91} \\
+\ \underline{819} \\
+\ 95\overline{7} \\
\underline{21} \\
+\ 11\overline{6} \\
\underline{18} \\
29 \vdots 29 \quad \textit{deci}\ 29|A
\end{array}$$

Gruparea suprimată sau cifra suprimată am subliniat-o cu o bară deasupra şi se aplică paşii precedenţi.

Practic, testarea unui număr A dacă se divide cu un număr b, se realizează cu această schemă și nu cu celelalte variante prezentate.

2)Fie numărul A=8917643590137.Să-l testăm cu 19.

$19 \mid A$?	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
A=8917643590137	8917643+ 4130959 ——— 13048602	13048+ 4816 ——— 17864	178+ 256 —— 434	43+ 8 — 51	$51 \not\vdots 19$	$19 \nmid A$

P_1:Am suprimat lui A ultimele 6 cifre și am adunat numărului rămas 8917643 pe produsul dintre 7(din tabelă) și partea suprimată 590137 obținând:13048602.

P_2:Suprimând lui 13048602 ultimele 3 cifre, pe 602, obținem 13048. Adunăm lui 13048 pe 8.602 și obținem:17864(8 este din tabelă).

P_3:Suprimând lui 17864 ultimele două cifre,pe 64,obținem 178. Adunăm lui 178 pe 6.64, obținem 434(4 este din tabelă).

P_4:Suprimând lui 434 ultima cifră,pe 4, obținem 43.Adunăm lui 43 pe 2.4, obținem 51(2 este din tabelă).

P_5-P_6: Decidem: $51 \not\vdots 19$,adică $19 \nmid A$.

Testarea se putea face și cu schema de la aplicația 1, aceea este mai rapidă și mai practică.

Observația 5:

Când înmulțim numere cu terminația în 1(de forma $\overline{a1}$) cu numere care au terminația în 9(de forma $\overline{b9}$),obținem numere cu terminația în 9 de forma $\overline{c9}$.

Teorema 3:

$$\overline{a1} \mid A \leftrightarrow 9 \cdot \overline{a1} \mid \left(\frac{A - a_0}{10} + (\overline{b}+1) \cdot a_0 \right), \quad \text{unde} \quad 9 \cdot \overline{a1} = \overline{b9}$$

Demonstrație:

a)Dacă $9\cdot\overline{a1} \mid \left(\frac{A-a_0}{10}+(\overline{b}+1)\cdot a_0\right)$ atunci $\frac{A-a_0}{10}+(\overline{b}+1)\cdot a_0=9\cdot\overline{a1}\cdot k$,

$k\in\mathbb{N} \Leftrightarrow A-a_0+10\overline{b}\cdot a_0+10a_0=10k\cdot 9\cdot\overline{a1} \Leftrightarrow A+10\overline{b}\cdot a_0+9a_0=10k\cdot\overline{b9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A+a_0\cdot(10\overline{b}+9)=10k\cdot\overline{b9} \Leftrightarrow A=10k\cdot\overline{b9}-a_0\cdot\overline{b9} \Leftrightarrow A=\overline{b9}\cdot(10k-a_0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A=9\cdot\overline{a1}\cdot(10k-a_0) \Leftrightarrow \overline{a1} \mid A$;

b)Dacă $\overline{a1} \mid A$, atunci $A=\overline{a1}\cdot h$, $h\in\mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(\overline{b}+1)\cdot a_0=$

$=\frac{\overline{a1}\cdot h-a_0}{10}+(\overline{b}+1)\cdot a_0 \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(b+1)\cdot a_0=\frac{\overline{a1}\cdot h-a_0+10\overline{b}\cdot a_0+10a_0}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(\overline{b}+1)\cdot a_0=\frac{\overline{a1}\cdot h+10\overline{b}\cdot a_0+9a_0}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(\overline{b}+1)\cdot a_0=$

$=\frac{\overline{a1}\cdot h+a_0\cdot(10\overline{b}+9)}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(\overline{b}+1)\cdot a_0=\frac{\overline{a1}\cdot h+a_0\cdot\overline{b9}}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(\overline{b}+1)\cdot a_0=\frac{\overline{a1}\cdot h+9\cdot\overline{a1}\cdot a_0}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(\overline{b}+1)\cdot a_0=\overline{a1}\cdot\frac{h+9a_0}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{a1} \mid \left(\frac{A-a_0}{10}+(\overline{b}+1)\cdot a_0\right)$.

Din a) şi b) rezultă echivalenţa.
Această demonstraţie justifică afirmaţia de la observaţia 2.
Exemple:
Să formulăm un criteriu de divizibilitate pentru 21 de tipul teoremei 2.Pentru aceasta înmulţim pe 21 cu 9 pentru ca din număr cu terminaţia in 1 să devină număr cu terminaţia in 9, iar criteriul ce-l vom stabili pentru produsul obţinut va fi adevărat şi pentru 21.
Deci 21•9=189. Formulăm criteriul.
Numărul 189 divide pe A, dacă şi numai dacă, suprimându-i lui A ultima cifră şi adunând numărului rămas produsul dintre (18+1) şi cifra suprimată, se obţine un număr divizibil cu 189.Inlocuind pe

189, în această formulare, cu 21, veți obține un criteriu pentru 21.

Observația 6.

Când înmulțim numere cu terminația în 9 (de forma $\overline{a9}$) cu numere care au terminația tot în 9, se obțin numere cu terminația în 1 de forma $\overline{a1}$.

Teorema 4.

$$\overline{a9} | A \Leftrightarrow 9\cdot\overline{a9} \left| \frac{A-a_0}{10}-b\cdot a_0 \right|, \quad \text{unde} \quad 9\cdot\overline{a9}=\overline{b1}$$

Demonstrație:

a) Dacă $9\cdot\overline{a9} \left| \frac{A-a_0}{10}-\overline{b}\cdot a_0 \right|$, atunci $\frac{A-a_0}{10}-\overline{b}\cdot a_0=9\cdot\overline{a9}\cdot k,\ k\in\mathbb{N} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A-a_0-10\overline{b}\cdot a_0=9\cdot 10k\cdot\overline{a9} \Leftrightarrow A-a_0\cdot(10\overline{b}+1)=10k\cdot 9\cdot\overline{a9} \Leftrightarrow A=$$

$$=10k\cdot 9\cdot\overline{a9}+a_0\cdot\overline{b1} \Leftrightarrow A=10k\cdot 9\cdot\overline{a9}+a_0\cdot 9\cdot\overline{a9} \Leftrightarrow A=\overline{a9}\cdot(90k+9a_0) \Leftrightarrow \overline{a9}|A;$$

b) Dacă $\overline{a9}|A$, atunci $A=\overline{a9}\cdot h,\ h\in\mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{b}\cdot a_0=\frac{\overline{a9}\cdot h-a_0}{10}-\overline{b}\cdot a_0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{b}\cdot a_0=\frac{\overline{a9}\cdot h-a_0-10\overline{b}\cdot a_0}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{b}\cdot a_0=\frac{\overline{a9}\cdot h-a_0\cdot(10\overline{b}+1)}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{b}\cdot a_0=\frac{\overline{a9}\cdot h-\overline{b1}\cdot a_0}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{b}\cdot a_0=\frac{\overline{a9}\cdot h-9\cdot\overline{a9}\cdot a_0}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{b}\cdot a_0=9\cdot\overline{a9}\cdot\frac{h-9a_0}{9\cdot 10} \Leftrightarrow 9\cdot\overline{a9} \left| \frac{A-a_0}{10}-\overline{b}\cdot a_0 \right| \Leftrightarrow \overline{b1} \left| \frac{A-a_0}{10}-\overline{b}\cdot a_0 \right.$$

Din a) și b) rezultă echivalența.

Demonstrația teoremei 4 confirmă justețea afirmației de la observația 4.

Exemple:

Să formulăm numărului 19 un criteriu de tipul teoremei 1. Pentru aceasta îl vom înmulți pe 19 cu 9 pentru ca să devină un număr cu terminația în 1. Deci 19·9=171 și formulăm un criteriu pentru acest produs, care va fi adevărat şi pentru factorii produsului,deci şi pentru 19.

Numărul 171 divide pe A, dacă şi numai dacă, suprimându-i lui A ultima cifră şi scăzând din numărul rămas produsul dintre 17 şi cifra suprimată,se obţine un număr divizibil cu 171.Inlocuind în această formulare numărul 171,cu 19, se obţine criteriul pentru 19.

§.3.CRITERII DE DIVIZIBILITATE CU NUMERE AVÂND TERMINAŢIA ÎN 3.

(de forma $\overline{a3}$ unde"a"poate fi cifră sau un număr de mai multe cifre)

Observaţia 7.
Când înmulţim numere cu terminaţia în 3 cu numere care au terminaţia în 7 se obţin numere cu terminaţia în 1.

Ţinând seama de această observaţie, vom putea formula criterii de divizibilitate de tipul teoremei 1, cu numere de forma $\overline{a3}$

Teorema 5.

$$\overline{a3} \mid A \Leftrightarrow 7\cdot\overline{a3} \mid \left|\frac{A-a_0}{10}-\overline{c}\cdot a_0\right| \text{, unde } 7\cdot\overline{a3}=\overline{c1}$$

Demonstraţie:

a)Dacă $7\cdot\overline{a3} \mid \left|\frac{A-a_0}{10}-\overline{c}\cdot a_0\right|$, atunci $\frac{A-a_0}{10}-\overline{c}\cdot a_0=7\cdot\overline{a3}\cdot k,\ k\in\mathbb{N} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A-a_0-10\overline{c}\cdot a_0 = 10k\cdot 7\cdot\overline{a3} \Leftrightarrow A-a_0\cdot(10\overline{c}+1)=10k\cdot 7\cdot\overline{a3} \Leftrightarrow A=$$

$$=10k\cdot 7\cdot\overline{a3}+a_0\cdot\overline{c1} \Rightarrow A=\overline{a3}\cdot 7\cdot 10k+a_0\cdot 7\cdot\overline{a3} \Leftarrow A=\overline{a3}\cdot(70k+7a_0) \Rightarrow \overline{a3}\mid A;$$

b)Dacă $\overline{a3} \mid A$,atunci $A=\overline{a3}\cdot h,\ h\in\mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{c}\cdot a_0=\frac{\overline{a3}\cdot h-a_0}{10}-\overline{c}\cdot a_0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{c}\cdot a_0=\frac{\overline{a3}\cdot h-a_0-10\overline{c}\cdot a_0}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{c}\cdot a_0=\frac{\overline{a3}\cdot h-a_0(10\overline{c}+1)}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{c}\cdot a_0=\frac{\overline{a3}\cdot h-a_0\cdot\overline{c7}}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{c}\cdot a_0=\frac{\frac{7}{7}\cdot\overline{a3}\cdot h-a_0\cdot 7\cdot\overline{a3}}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{c}\cdot a_0=7\cdot\overline{a3}\cdot\frac{h-7a_0}{10} \Leftrightarrow 7\cdot\overline{a3}\,\Big|\left|\frac{A-a_0}{10}-\overline{c}\cdot a_0\right|.$$

Din a) și b) rezultă echivalența.

Observația 8.

Când înmulțim numere cu terminația în 3 cu numere care au terminația tot în 3, obținem numere cu terminația în 9.Folosind acestă observație,vom putea formula criterii de divizibilitate de tipul teoremei 2, cu numere de forma $\overline{a3}$

Teorema 6.

$$\overline{a3}\,|\,A \Leftrightarrow 3\cdot\overline{a3}\;\Big|\left(\frac{A-a_0}{10}+(\overline{c}+1)a_0\right),\quad \text{unde } 3\cdot\overline{a3}=\overline{c9}$$

Demonstrație:

a)Dacă $3\cdot\overline{a3}\;\Big|\left(\frac{A-a_0}{10}+(\overline{c}+1)\cdot a_0\right)$, atunci $\frac{A-a_0}{10}+(\overline{c}+1)\cdot a_0=3\cdot\overline{a3}\cdot k,\ k\in\mathbb{N} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A-a_0+10\overline{c}\cdot a_0+10a_0=10k\cdot 3\cdot\overline{a3} \Leftrightarrow A+10\overline{c}\cdot a_0+9a_0=10k\cdot 3\cdot\overline{a3} \Leftrightarrow A=$$

$$=10k\cdot 3\cdot\overline{a3}-a_0\cdot\overline{c9} \Leftrightarrow A=10k\cdot 3\cdot\overline{a3}-a_0\cdot 3\cdot\overline{a3} \Leftrightarrow A=\overline{a3}\cdot(30k-3a_0) \Leftrightarrow \overline{a3}\,|\,A.$$

b)Dacă $\overline{a3}\;|\;A$,atunci $A=\overline{a3}\cdot h,\ h\in\mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(\overline{c}+1)\cdot a_0=\frac{\overline{a3}\cdot h-a_0}{10}+(\overline{c}+1)\cdot a_0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(\overline{c}+1)\cdot a_0=\frac{\overline{a3}\cdot h-a_0+10\overline{c}\cdot a_0+10a_0}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(\overline{c}+1)\cdot a_0=$$

$$=\frac{\overline{a3}\cdot h+a_0(10\overline{c}+9)}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(\overline{c}+1)\cdot a_0=\frac{\overline{a3}\cdot h+a_0\cdot\overline{c9}}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(\overline{c}+1)\cdot a_0=$$

$$=\frac{\frac{3}{3}\cdot\overline{a3}\cdot h+3\cdot\overline{a3}\cdot a_0}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(\overline{c}+1)\cdot a_0=3\cdot\overline{a3}\cdot\frac{h+3a_0}{3\cdot 10} \Leftrightarrow 3\cdot\overline{a3}\,\Big|\left(\frac{A-a_0}{10}+(\overline{c}+1)\cdot a_0\right)$$

Din a) şi b) rezultă echivalenţa.

Să formulăm criterii cu numere de forma $\overline{a3}$

Câteva criterii de divizibilitate cu 13.

1) $13 \mid A \Leftrightarrow 13 \mid \left|\dfrac{A-A_1}{10}-9A_1\right|$

$13\cdot 7=91;\ 9$

2) $13 \mid A \Leftrightarrow 13 \mid \left(\dfrac{A-A_1}{10}+4A_1\right);$

$13\cdot 3=39;\quad 4=3+1$

3) $13 \mid A \Leftrightarrow 13 \mid ((A-A_2)\cdot 10^{-2}-10A_2)$

$13\cdot 77=1001;\quad 10$

4) $13 \mid A \Leftrightarrow 13 \mid ((A-A_2)\cdot 10^{-2}+3A_2))$

$13\cdot 23=299;\quad 3=2+1$

5) $13 \mid A \Leftrightarrow 13 \mid ((A-A_4)\cdot 10^{-4}-4\cdot A_4);$

6) $13 \mid A \Leftrightarrow 13 \mid ((A-A_5)\cdot 10^{-5}+A_5);$

unde $A_1=a_0;\ A_2=\overline{a_1a_0};\ A_3=\overline{a_2a_1a_0};\ A_4=\overline{a_3a_2a_1a_0},\ \ldots$

Câteva criterii de divizibilitate cu 23:

1) $23 \mid A \Leftrightarrow 23 \mid |(A-A_1)\cdot 10^{-1}-16A_1|;$

$23\cdot 7=161;\ 16$

2) $23 \mid A \Leftrightarrow 23 \mid ((A-A_1)\cdot 10^{-1}+7A_1);$

$23\cdot 3=69;\quad 7=6+1$

3) $23 \mid A \Leftrightarrow 23 \mid |(A-A_2)\cdot 10^{-2}-20A_2|;$

$23\cdot 87=2001;\quad 20$

4) $23 \mid A \Leftrightarrow 23 \mid ((A-A_2)\cdot 10^{-2}+3A_2);$

$23\cdot 13=299;\quad 3=2+1$

Câteva criterii de divizibilitate cu 43:

1) $43 \mid A \Leftrightarrow 43 \mid |(A-A_1)\cdot 10^{-1}-30A_1|;$

$43\cdot 7=301;\quad 30$

2) $43 \mid A \Leftrightarrow 43 \mid ((A-A_1)\cdot 10^{-1}+13A_1);$

$43\cdot 3=129;\quad 13=12+1$

3) $43 \mid A \Leftrightarrow 43 \mid |(A-A_2)\cdot 10^{-3}-3A_2|;$

$43\cdot 7=301;\quad 3$

4) $43 \mid A \Leftrightarrow 43 \mid ((A-A_2)\cdot 10^{-2}+40A_2);$

$43\cdot 93=3999;\quad 40=39+1$

5) $43 \mid A \Leftrightarrow 43 \mid |(A-A_7)\cdot 10^{-7}-7A_7|;$

6) $43 \mid A \Leftrightarrow 43 \mid ((A-A_3)\cdot 10^{-3}+4\cdot A_3);$

Câteva criterii de divizibilitate cu 53:

1) $53 \mid A \Leftrightarrow 53 \mid |(A-A_1)\cdot 10^{-1}-37A_1|;$

$53\cdot 7=371;\quad 37$

2) $53 \mid A \Leftrightarrow 53 \mid ((A-A_1)\cdot 10^{-1}+16A_1);$

$53\cdot 3=159;\quad 16=15+1$

3) $53|A \Leftrightarrow 53|\ |(A-A_2)\cdot 10^{-2}-9A_2\ |$;

4) $53|A \Leftrightarrow 53|\ |(A-A_7)\cdot 10^{-7}-4A_7\ |$;

5) $53|A \Leftrightarrow 53|\ |(A-A_{10})\cdot 10^{-10}-7A_{10}\ |$;

Câteva criterii de divizibilitate cu 73:

1) $73|A \Leftrightarrow 73|\ |(A-A_1)\cdot 10^{-1}-51A_1\ |$;
$73\cdot 7=511$; 51

2) $73|A \Leftrightarrow 73|\ ((A-A_1)\cdot 10^{-1}+22A_1\ )$;
$73\cdot 3=219$; $22=21+1$

3) $73|A \Leftrightarrow 73|\ |(A-A_4)\cdot 10^{-4}-A_4\ |$;

4) $73|A \Leftrightarrow 73|\ ((A-A_8)\cdot 10^{-8}+A_8)$;

Câteva criterii de divizibilitate cu 83;și cu alte numere.

1) $83|A \Leftrightarrow 83|\ |(A-A_1)\cdot 10^{-1}-58A_1\ |$;
$83\cdot 7=581$; 58

2) $83|\ ((A-A_1)\cdot 10^{-1}+25A_1) \Leftrightarrow 83|\ A$
$83\cdot 3=243$; $25=24+1$

3) $83|A \Leftrightarrow 83|\ |(A-A_5)\cdot 10^{-5}-72A_5\ |$;

4) $83|A \Leftrightarrow 83|\ ((A-A_9)\cdot 10^{-9}+48A_9)$.

5) $13|A \Leftrightarrow 13|\ |(A-A_{17})\cdot 10^{-17}-3A_{17}\ |$;

6) $23|A \Leftrightarrow 23|\ ((A-A_{20})\cdot 10^{-20}+8A_{20})$

7) $43|A \Leftrightarrow |\ |(A-A_{15})\cdot 10^{-15}-8A_{15}\ |$;

8) $53|A \Leftrightarrow 53|\ |(A-A_{20})\cdot 10^{-20}-4A_{20}\ |$

9) $73|A \Leftrightarrow 73|\ |(A-A_{20})\cdot 10^{-20}-A_{20}\ |$;

10) $83|A \Leftrightarrow 83|\ |(A-A_{19})\cdot 10^{-19}-2A_{19}\ |$

11) $13|A \Leftrightarrow 13|\ ((A-A_{50})\cdot 10^{-50}+3A_{50})$;

12) $23|A \Leftrightarrow 23|\ |(A-A_{49})\cdot 10^{-49}-6A_{49}\ |$

13) $43|A \Leftrightarrow 43|\ ((A-A_{46})\cdot 10^{-46}+9A_{46})$;

14) $53|A \Leftrightarrow 53|\ |(A-A_{45})\cdot 10^{-45}-40A_{45}\ |$

15) $73|A \Leftrightarrow 73|\ |(A-A_{44})\cdot 10^{-44}-A_{44}\ |$;

16) $83|A \Leftrightarrow 83|\ ((A-A_{41})\cdot 10^{-41}+A_{41})$

17) $13|A \Leftrightarrow 13|\ |(A-A_{41})\cdot 10^{-41}-3A_{41}\ |$;

18) $23|A \Leftrightarrow 23|\ ((A-A_{44})\cdot 10^{-44}+A_{44})$

19) $43|A \Leftrightarrow 43|\ |(A-A_{50})\cdot 10^{-50}-5A_{50}\ |$;

20) $53|A \Leftrightarrow 53|\ |(A-A_{46})\cdot 10^{-46}-4A_{46}\ |$

21) $73|A \Leftrightarrow 73|\ |(A-A_{44})\cdot 10^{-44}-A_{44}\ |$;

22) $83|A \Leftrightarrow 83|\ ((A-A_{41})\cdot 10^{-41}+A_{41})$

23) $13|A \Leftrightarrow 13|\ |(A-A_{35})\cdot 10^{-35}-3A_{35}\ |$;

24) $23|A \Leftrightarrow 23|\ |(A-A_{39})\cdot 10^{-39}-4A_{39}\ |$

25) $43|A \Leftrightarrow 43|\ |(A-A_{36})\cdot 10^{-36}-8A_{36}\ |$;

26) $53|A \Leftrightarrow 53|\ |(A-A_{37})\cdot 10^{-37}-6A_{37}\ |$

27) $13|A \Leftrightarrow 13|\ |(A-A_{32})\cdot 10^{-32}-10A_{32}\ |$;

28) $13|A \Leftrightarrow 13|\ ((A-A_{32})\cdot 10^{-32}+3A_{32})$

29) $23|A \leftrightarrow 23|\,|(A-A_{35})\cdot 10^{-35}-3A_{35}|$; 30) $23|A \leftrightarrow 23|\,((A-A_{35})\cdot 10^{-35}+20A_{35})$

31) $43|A \leftrightarrow 43|\,|(A-A_{36})\cdot 10^{-36}-8A_{36}|$; 32) $43|A \leftrightarrow 43|\,((A-A_{36})\cdot 10^{-36}+35A_{36})$

33) $53|A \leftrightarrow 53|\,|(A-A_{33})\cdot 10^{-33}-4A_{33}|$; 34) $53|A \leftrightarrow 53|\,((A-A_{33})\cdot 10^{-33}+49A_{33})$

35) $73|A \leftrightarrow 73|\,|(A-A_{35})\cdot 10^{-39}-63A_{39}|$; 36) $73|A \leftrightarrow 73|\,((A-A_{39})\cdot 10^{-39}+10A_{39})$.

§.4.CRITERII DE DIVIZIBILITATE CU NUMERE AVÂND TERMINAŢIA ÎN 7

(de forma $\overline{a7}$ unde"a"poate fi cifră sau un număr de mai multe cifre).

Pentru a formula criterii de divizibilitate cu numere de forma $\overline{a7}$, putem proceda în două moduri.

Observaţia 9.

Înmulţindu-le cu numere care au terminaţia în 3 pentru a obţine numere cu terminaţia în 1 şi formulăm pentru produsul obţinut un criteriu de tipul teoremei 1, care este adevărat şi pentru factorul iniţial.

Teorema 7.

$\overline{a7}|A \leftrightarrow 3\cdot\overline{a7}|\left|\frac{A-a_0}{10}-\overline{d}\cdot a_0\right|$, unde $3\cdot\overline{a7}=\overline{d1}$

Demonstraţie:

a)Dacă $3\cdot\overline{a7}|\left|\frac{A-a_0}{10}-\overline{d}\cdot a_0\right|$ atunci $\frac{A-a_0}{10}-\overline{d}\cdot a_0=3\cdot\overline{a7}\cdot k,\ k\in\mathbb{N} \leftrightarrow A-a_0-10\overline{d}\cdot a_0=$

$=10k\cdot 3\cdot\overline{a7} \Leftrightarrow A-a_0\cdot(10\overline{d}+1)=10k\cdot\overline{d1} \Leftrightarrow A=10k\cdot\overline{d1}+a_0\cdot\overline{d1} \Leftrightarrow A=$

$=\overline{d1}\cdot(10k+a_0) \Leftrightarrow \overline{d1}|A \Leftrightarrow 3\cdot\overline{a7}\ |\ A \Leftrightarrow \overline{a7}\ |\ A$;

b)Dacă $\overline{a7}\ |\ A$,atunci $A=\overline{a7}\cdot k,\ k\in\mathbb{N} \Leftrightarrow \dfrac{A-a_0}{10}-\overline{d}\cdot a_0=\dfrac{\overline{a7}\cdot k-a_0}{10}-\overline{d}\cdot a_0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{d}\cdot a_0=\frac{\overline{a7}\cdot k-a_0-10\overline{d}\cdot a_0}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{d}\cdot a_0=\frac{\overline{a7}\cdot k-a_0\cdot(10\overline{d}+1)}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{d}\cdot a_0=\frac{\overline{a7}\cdot k-\overline{d1}\cdot a_0}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{d}\cdot a_0=\frac{\frac{3}{3}\cdot\overline{a7}\cdot k-a_0\cdot\overline{d1}}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{d}\cdot a_0=$$

$$=\frac{3\cdot\overline{a7}-3\cdot a_0\cdot 3\cdot\overline{a7}}{3\cdot 10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}-\overline{d}\cdot a_0=3\cdot\overline{a7}\cdot\frac{h-3a_0}{3\cdot 10} \Leftrightarrow 3\cdot\overline{a7}\Big|\left|\frac{A-a_0}{10}-\overline{d}\cdot a_0\right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{a7}\Big|\left|\frac{A-a_0}{10}-\overline{d}\cdot a_0\right|$$

Din a) și b) rezultă echivalența, sau
Observația 10.

Înmulțindu-le cu numere care au terminația în 7, pentru a obține numere cu terminația în 9 și formulăm pentru produsul obținut un criteriu de tipul teoremei 2, care este adevărată și pentru factorul inițial.

Teorema 8.

$$\overline{a7}|A \Leftrightarrow 7\cdot\overline{a7}\Big|\left(\frac{A-a_0}{10}+(\overline{d}+1)\cdot a_0\right),\quad \text{unde}\quad 7\cdot\overline{a7}=\overline{d9}$$

Demonstrație:

a)Dacă $7\cdot\overline{a7}\ \Big|\left(\dfrac{A-a_0}{10}+(\overline{d}+1)\cdot a_0\right)$ atunci $\dfrac{A-a_0}{10}+(\overline{d}+1)\cdot a_0=7\cdot\overline{a7}\cdot k,\ k\in\mathbb{N} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow A-a_0+10\overline{d}\cdot a_0+10a_0=10k\cdot 7\cdot\overline{a7} \Leftrightarrow A=10k\cdot 7\cdot\overline{a7}-\overline{d9}\cdot a_0 \Leftrightarrow A=\overline{d9}\cdot(10k-a_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A=7\cdot\overline{a7}\cdot(10k-a_0) \Leftrightarrow \overline{a7}\ |\ A;$$

b)Dacă $\overline{a7}\ |\ A$, atunci $A=\overline{a7}\cdot k,\ k\in\mathbb{N} \Leftrightarrow \dfrac{A-a_0}{10}+(\overline{d}+1)\cdot a_0=\dfrac{\overline{a7}\cdot k-a_0}{10}+(\overline{d}+1)\cdot a_0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(\overline{d}+1)\cdot a_0=\frac{\overline{a7}\cdot k+10\overline{d}\cdot a_0+10a_0}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(\overline{d}+1)\cdot a_0=\frac{\overline{a7}\cdot k+10\overline{d}\cdot a_0+9a_0}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(\overline{d}+1)\cdot a_0=\frac{\overline{a7}\cdot k+a_0\cdot(10\overline{d}+9)}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(\overline{d}+1)\cdot a_0=$$

$$=\frac{\frac{7}{7}\cdot\overline{a7}\cdot k+a_0\cdot 7\cdot\overline{a7}}{10} \Leftrightarrow \frac{A-a_0}{10}+(\overline{d}+1)\cdot a_0=\frac{7\cdot\overline{a7}\cdot(k+7\cdot a_0)}{7\cdot 10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7\cdot\overline{a7}\ \left|\ \left(\frac{A-a_0}{10}+(\overline{d}+1)\cdot a_0\right) \Leftrightarrow \overline{a7}\ \right|\ \left(\frac{A-a_0}{10}+(\overline{d}+1)\cdot a_0\right)$$

Din a) și b) rezultă echivalența.

Câteva criterii de divizibilitate cu 7:

1) $7|A \Leftrightarrow 7|\ |(A-A_1)\cdot 10^{-1}-2A_1|$
$7\cdot 3=21;\quad 2$

2) $7|A \Leftrightarrow 7|\ ((A-A_1)\cdot 10^{-1}+5A_1);$
$7\cdot 7=49;\quad 5=4+1$

3) $7|A \Leftrightarrow 7|\ |(A-A_2)\cdot 10^{-2}-3A_2|;$
$7\cdot 43=301;\quad 3$

4) $7|A \Leftrightarrow 7|((A-A_2)\cdot 10^{-2}+4A_2)$
$7\cdot 57=399;\quad 4=3+1$

5) $7|A \Leftrightarrow 7|\ |(A-A_3)\cdot 10^{-3}-A_3|;$

6) $7|A \Leftrightarrow 7|\ ((A-A_3)\cdot 10^{-3}+6A_3)$

unde $A_1=a_0;\ A_2=\overline{a_1a_0};\ A_3=\overline{a_2a_1a_0};\ A_4=\overline{a_3a_2a_1a_0},\ \ldots$

Câteva exemple de criterii de divizibilitate cu 17:

1) $17|A \Leftrightarrow 17|\ |(A-A_1)\cdot 10^{-1}-5A_1|;$
$17\cdot 3=51;\quad 5$

2) $17|A \Leftrightarrow 17|\ ((A_{A_1})\cdot 10^{-1}+12A_1);$
$17\cdot 17=119;\quad 12=11+1$

3) $17|A \Leftrightarrow 17|\ |(A-A_2)\cdot 10^{-2}-9A_2|;$
$901=17\cdot 53;\quad 9$

4) $17|A \Leftrightarrow 17|\ ((A-A_2)\cdot 10^{-2}+8A_2);$
$17\cdot 47=799;\quad 8=7+1$

Câteva criterii de divizibilitate cu 37:

1) $37|A \Leftrightarrow 37|\,|(A-A_1)\cdot10^{-1}-11A_1\,|$;
$37\cdot3=111$ 11

2) $37|\,((A-A_1)\cdot10^{-1}+26A_1) \Leftrightarrow 37\,|A$
$37\cdot7=259$; $26=25+1$

3) $37|A \Leftrightarrow 37|\,|(A-A_6)\cdot10^{-6}-36A_6\,|$;

4) $37|A \Leftrightarrow 37|\,((A-A_6)\cdot10^{-6}+A_6)$;

Câteva criterii de divizibilitate cu 47:

1) $47|A \Leftrightarrow 47|\,|(A-A_1)\cdot10^{-1}-14A_1\,|$
$47\cdot3=141$; 14

2) $47\,|A \Leftrightarrow 47|\,((A-A_1)\cdot10^{-1}+33A_1\,)$;
$47\cdot7=329$; $33=32+1$

3) $47|A \Leftrightarrow 47|\,|(A-A_5)\cdot10^{-5}-3A_5\,|$;

4) $47|A \Leftrightarrow 47|\,((A-A_{10})\cdot10^{-10}+9A_{10}\,)$.

Câteva criterii de divizibilitate cu 67:

1) $67|A \Leftrightarrow 67|\,|(A-A_1)\cdot10^{-1}-20A_1\,|$;
$67\cdot3=201$; 20

2) $67|\,((A-A_1)\cdot10^{-1}+47A_1) \Leftrightarrow 67\,|A$
$67\cdot7=469$; $47=46+1$

3) $67|A \Leftrightarrow 67|\,|(A-A_2)\cdot10^{-2}-2A_2\,|$;

4) $67|A \Leftrightarrow 67|\,((A-A_4)\cdot10^{-4}+4A_4)$.

Câteva criterii de divizibilitate cu 97:şi cu alte numere:

1) $97|A \Leftrightarrow 97|\,|(A-A_1)\cdot10^{-1}-29A_1\,|$
$97\cdot3=291$; 29

2) $97|A \Leftrightarrow 97|\,((A-A_1)\cdot10^{-1}+68A_1)$
$97\cdot7=679$; $68=67+1$

3) $97|A \Leftrightarrow 97|\,((A-A_8)\cdot10^{-8}+6A_8)$;

4) $97|A \Leftrightarrow 97|\,((A-A_{10})\cdot10^{-10}+2A_{10})$.

5) $17|A \Leftrightarrow 17|\,|(A-A_{20})\cdot10^{-20}-4A_{20}\,|$;

6) $37|A \Leftrightarrow 37|\,((A-A_{15})\cdot10^{-15}+A_{15})$

7) $47|A \Leftrightarrow 47|\,((A-A_{16})\cdot10^{-16}+2A_{16})$;

8) $67|A \Leftrightarrow ((A-A_{14})\cdot10^{-14}+6A_{14})\,\vdots\,67$

9) $97|A \Leftrightarrow 97|\,((A-A_{20})\cdot10^{-20}+4A_{20})$;

10) $7|A \Leftrightarrow 7|\,|(A-A_{25})\cdot10^{-25}-2A_{25}\,|$

11) $17|A \Leftrightarrow 17|\,((A-A_{24})\cdot10^{-24}+A_{24})$;

12) $37|A \Leftrightarrow 37|\,((A-A_{24})\cdot10^{-24}+A_{24})$

13) $47|A \Leftrightarrow 47|\,|(A-A_{23})\cdot10^{-23}-A_{23}\,|$;

14) $67|A \Leftrightarrow 67|\,|(A-A_{30})\cdot10^{-30}-5A_{30}\,|$

15) $97|A \Leftrightarrow 97|\,((A-A_{30})\cdot10^{-30}+8A_{30})$;

16) $17|A \Leftrightarrow 17|\,((A-A_{50})\cdot10^{-50}+8A_{50})$

17) $37|A \Leftrightarrow 37|\,((A-A_{45})\cdot10^{-45}+A_{45})$;

18) $67|A \Leftrightarrow 67|\,((A-A_{46})\cdot10^{-46}-7A_{46})$

19) $97 \mid A \Leftrightarrow 97 \mid \left|(A-A_{48})\cdot 10^{-48}-A_{48}\right|$;

20) $7 \mid A \Leftrightarrow 7 \mid \left|(A-A_{69})\cdot 10^{-69}-3A_{69}\right|$

21) $7 \mid A \Leftrightarrow 7 \mid ((A-A_{69})\cdot 10^{-69}+4A_{69})$;

22) $17 \mid A \Leftrightarrow 17 \mid \left|(A-A_{66})\cdot 10^{-66}-9A_{66}\right|$

23) $17 \mid A \Leftrightarrow 17 \mid ((A-A_{66})\cdot 10^{-66}+8A_{66})$

24) $37 \mid A \Leftrightarrow 37 \mid \left|(A-A_{66})\cdot 10^{-66}-36A_{66}\right|$

25) $37 \mid A \Leftrightarrow 37 \mid ((A-A_{66})\cdot 10^{-66}+A_{66})$;

26) $47 \mid A \Leftrightarrow 47 \mid \left|(A-A_{67})\cdot 10^{-67}-6A_{67}\right|$

27) $47 \mid A \Leftrightarrow 47 \mid ((A-A_{67})\cdot 10^{-67}+41A_{67})$;

28) $67 \mid A \Leftrightarrow 67 \mid \left|(A-A_{66})\cdot 10^{-66}-66A_{66}\right|$

29) $67 \mid A \Leftrightarrow 67 \mid ((A-A_{66})\cdot 10^{-66}+A_{66})$.

TABELA

cu caracteristicele primelor numere.

Numerele cu care înmulţim cifra sau gruparea suprimată le numim caracteristici

Nr.	Caracteristicile pentru numărul cifrelor suprimate																			
	1 cifră		2 cifre		3 cifre		4 cifre		5 cifre		6 cifre		7 cifre		8 cifre		9 cifre		10 cifre	
	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+
7	2	5	3	4	1	6	5	2	4	3	6	1	2	5	3	4	1	6	5	2
11	1	10	10	1	1	10	10	1	1	10	10	1	1	10	10	1	1	10	10	1
13	9	4	10	3	1	12	4	9	3	10	12	1	9	4	10	3	1	12	4	9
17	5	12	9	8	6	11	4	13	14	3	15	2	10	7	1	16	12	5	8	9
19	17	2	15	4	11	8	3	16	6	13	12	7	5	14	10	9	1	18	2	17
23	16	7	20	3	2	21	14	9	6	17	19	4	18	5	11	12	8	15	10	13
29	26	3	20	9	2	27	6	23	18	11	25	4	17	12	22	7	8	21	24	5
31	3	28	22	9	27	4	12	19	26	5	15	16	17	14	11	20	29	2	6	25
37	11	26	27	10	36	1	11	26	27	10	36	1	11	26	27	10	36	1	11	26
41	4	37	25	16	23	18	31	10	40	1	4	37	25	16	23	18	31	10	40	1
43	30	13	3	40	39	4	34	9	12	31	27	16	7	36	5	38	22	21	28	15
47	14	33	39	8	18	29	30	17	3	44	5	42	24	23	40	7	4	43	38	9
53	37	16	9	44	38	15	25	28	29	24	40	13	4	49	11	42	17	36	7	46
59	53	6	23	36	20	39	2	57	12	47	13	46	19	40	55	4	35	24	33	26
61	6	55	25	36	33	28	46	15	29	32	9	52	7	54	19	42	8	53	13	48
67	20	47	2	65	27	40	63	4	13	54	8	59	41	26	51	16	52	15	32	35
71	7	64	22	49	59	12	13	58	51	20	69	2	14	57	44	27	47	24	26	45
73	51	22	27	46	10	63	1	72	22	51	46	27	63	10	72	1	51	22	27	46
79	71	8	15	64	41	38	12	67	17	62	57	22	61	18	14	65	33	46	27	52
83	58	25	39	44	62	21	56	27	72	11	57	26	14	69	18	65	35	48	45	38
89	80	9	8	81	72	17	25	64	47	42	67	22	69	20	87	2	71	18	16	73
97	29	68	32	65	42	55	43	54	14	63	79	18	37	60	91	6	77	20	95	2
101	10	91	1	100	91	10	100	1	10	91	1	100	91	10	100	1	10	91	1	100

§.5. CONCLUZII ŞI PREZENTAREA TABELEI

Definiţie: *Numărul cu care inmulţim cifra sau gruparea suprimată o numim caracteristică.*

Adaptând cele opt teoreme la cazurile particulare de numere prime,cuprinse între 7 şi 101, am intocmit o tabelă în care, fiecărui număr prim, din acest interval,ii corespunde câte 20 de criterii (20 de algoritmi) de divizibilitate.
Tabela conţine 460 de caracteristici care inseamnă tot atâtea criterii de divizibilitate.
Tabela conţine 23 de linii şi 11 coloane mari.
În prima coloană din stânga sunt trecute numerele prime începând cu 7 şi terminând cu 101.
Pe linia fiecărui număr prim există 10 coloane, fiecare din ele fiind împărţită în două părţi: cea din stânga este cu "minus", iar cea din dreapta este cu "plus".
Tabela folosită în forma dată, dă posibilitatea să-i suprimăm numărului cercetat A, maxim 10 cifre, în două moduri:

1) înmulţind caracteristica de pe direcţia lui minus cu gruparea suprimată şi scăzând produsul obţinut din numărul rămas(în cazul teoremelor 1,4,5 şi 7), sau

2) înmulţind caracteristica de pe direcţia lui plus cu gruparea suprimată şi adunând produsul obţinut numărului rămas(în cazul teoremelor 2,3,6, şi 8).

Numărul coloanei de pe linia fiecărui număr prim ne indică câte cifre se suprimă numărului A,evident,ţinând seama de lungimea lui.

În tabelă figurează cele mai mici caracteristici posibile pentru a suprima un anumit număr de cifre la numărul A. Dar, pentru acelaşi număr şi pentru a suprima acelaşi număr de cifre, putem avea o infinitate de caracteristici de forma: **a+7k** unde a-este

caracteristica din tabelă corespunzătoare numărului prim 7; $a\leq 6$, $a\in N^*$, $a\in N$. Aceasta justifică afirmaţia din prima parte a lucrării: ***" Pentru fiecare număr prim,putem formula o dublă infinitate de criterii".*** Dubla infinitate se mai justifică şi prin faptul că pentru fiecare număr, putem enunţa două tipuri de criterii:unul prin scădere, atunci când le facem să aibă terminaţia în 1 şi altul prin adunare, atunci când le facem să aibă terminaţia în 9.
Aceste ultime precizări ne îndreptăţesc să le numim pe teorema 1 şi teorema 2- criterii generale.

a) Pe linia lui 7, coloana 5(cifre), citim caracteristicile 4 pe direcţia lui minus şi 3 pe direcţia lui plus.
Ce putem face cu acestea?
Formulăm cu fiecare din ele câte un criteriu de divizibilitate pentru numărul prim 7, în următorul fel:
1) cu caracteristica 4 de pe direcţia lui minus

" Un număr A se divide cu 7 dacă şi numai dacă suprimându-i lui A ultimele 5 cifre şi scăzând din numărul rămas produsul dintre 4 şi gruparea suprimată,se obţine un număr divizibil cu 7 ".

2) cu caracteristica 3 de pe direcţia lui plus

" Un număr A se divide cu 7 dacă şi numai dacă suprimându-i lui A ultimele 5 cifre şi adunând numărului rămas produsul dintre 3 şi gruparea suprimată, se obţine un număr divizibil cu 7 ".

b) Pe linia numărului prim 73 coloana 4 citim caracteristicile 1 pe direcţia lui minus şi 72 pe direcţia lui plus.
Să formulăm cele două criterii:

1).Un număr A se divide cu 73 dacă şi numai dacă suprimându-i lui A ultimele 4 cifre şi scăzând din numărul rămas gruparea suprimată,se obţine un număr divizibil cu 73(pentru că 1 înmulţit cu gruparea suprimată= gruparea suprimată).

2).Un număr se divide cu 73 dacă şi numai dacă suprimându-i lui A ultimele 4 cifre şi adunând numărului rămas produsul dintre 72 şi gruparea suprimată se obţine un număr divizibil cu 73.

Am luat 4 caracteristici şi am formulat 4 criterii de divizibilitate.Cum tabela conţine 460 de caracteristici, deci ea are tot atâtea criterii de divizibilitate care se formulează după modelele date.

Criteriile formulate permit testarea divizibilităţii cu numere prime (sau neprime),a unui număr având oricâte cifre, putând depăşi chiar limitele impuse de reprezentarea internă în calculator. Testările efectuate pe un calculator FELIX C-256, pentru numere cu peste o sută de cifre, de către dl. lector Gh.Ardelean de la Universitatea Baia Mare, sunt concludente, fapt pentru care îi mulţumesc, iar ştiinţa îi va fi recunoscătoare. Aceaşi tabelă folosită într-un anumit mod mai reprezintă o culegere cu 460 de probleme de un anumit tip.

Fie A=49561042375001236$\overline{8974510397}$ număr cu 27 cifre.Cum îl testăm dacă este sau nu divizibil cu 17?.
Îi suprimăm ultimele 10 cifre şi înmulţim gruparea suprimată cu 8(vezi tabela; linia lui 17, coloana a 10-a, pe direcţia lui minus).Produsul obţinut îl scădem din partea rămasă şi obţinem:

49561042375001236-
<u>1796083176</u>
49561040578918060

Pentru că numărul obţinut are 17 cifre, îi putem suprima 8 cifre (aproape jumătate).
În linia lui 17, coloana 8, pe direcţia lui minus, aflăm caracteristica 1.
Deci,scădem din numărul rămas gruparea suprimată şi obţinem:

495610405-
<u>78918060</u>
416692345

Numărul rămas are 9 cifre,deci îi vom suprima 4 cifre.Pe linia lui 17 coloana a 4-a, pe direcţia lui minus, citim caracteristica 4. Deci suprimăm ultimele 4 cifre şi scădem din numărul rămas produsul 4.2345=9380

41669-
<u>9380</u>
32289

Numărul obţinut are 5 cifre,deci îi suprimăm 2 cifre şi scădem din 322 (numărul rămas) produsul dintre 9 (în linia lui 17, coloana 2, direcţia lui minus) şi 89, obţinem:

$|322-801|=479$ diferența am luat-o în modul.

Numărului rămas de 3 cifre,îi vom suprima ultima cifră și scădem din numărul rămas 47, produsul dintre 5 (linia 17, coloana 1, direcția lui minus) și 9, obținem:

$$47-45=2$$

Decidem: Cum $2 \not| 17$, deci $17 \not| A$, sau

Cu ajutorul congruențelor,acești pași expuși cu explicații, se pot scrie în felul următor:

$$49561042375001236-8.897410397=$$

$$=495610405\overline{78918060}\equiv(495610405-1.78918060)\,(\mathit{modulo}\ 17)=$$

$$=41669\overline{2345}\equiv(41669-4.2345)\,(\mathit{modulo}\ 17)=322\overline{89}\equiv$$

$$(322-9.89)\,(\mathit{modulo}\ 17)=|-479|=479\equiv(47-5\cdot 9)\,(\mathit{modulo}\ 17)=2\Leftrightarrow 17 \not| A,$$

sau așezate aceste operații în schemă, arată în felul următor:

$$\begin{array}{rl}
 & 4956104237500123\overline{68974510397} \\
- & \underline{1796083176} \\
 & 495610405\overline{78918060} \\
- & \underline{78918060} \\
 & 41669\overline{2345} \\
- & \underline{9380} \\
 & 322\overline{89} \\
- & \underline{801} \\
 & 47\overline{9} \\
- & \underline{45} \\
 & 2 \not| 17
\end{array}$$

deci $17 \not| A$

În fiecare pas, am marcat gruparea suprimată cu o bară deasupra,iar în stânga am pus pe direcție semnul minus(căci am folosit în acest exemplu, doar algoritmi prin scădere).În cazul că se folosec algoritmi prin adunare,se pune semnul plus pe direcție.Testarea s-a făcut în 5 pași de calcul și un pas de decizie.

Cu ajutorul tabelei prelungite(care dă posibilitatea suprimării a

100 de cifre), testarea s-ar fi terminat în mai puţini paşi (în principiu, se aplică, în mod convenabil, înjumătăţirea numărului A). Aţi observat că pe rând am suprimat: 10 cifre, 8 cifre, 4 cifre, 2 cifre, o cifră. Adică, am început cu algoritmul cel mai rapid şi am continuat cu algoritmi din ce în ce mai lenţi.

Ce se mai poate face cu caracteristicile din tabelă?

Să urmărim linia lui 7:

-prima coloană, pe direcţia lui minus, citim caracteristica 2; 2 provine de la $21=7\cdot3$ când l-am făcut pe 7 să devină număr cu terminaţia în 1.

-pe direcţia lui plus, citim caracteristica 5, ea provenind de la 49;4+1, când l-am făcut pe 7 să devină număr cu terminaţia în 9.

Deci, cu caracteristicile din coloana 1, pe linia lui 7, se pot forma numerele: 21 şi 49; 5-1=4; 49, iar despre aceste numere observăm că ambele sunt divizibile cu 7, deci şi suma lor: $21+49=70=7\cdot10=7\cdot10^1$.

În coloana a 2-a, linia lui 7, citim caracteristicile 3 şi 4. Numerele ce se pot forma sunt: 301 şi 399; $301+399=700=7\cdot100=7\cdot10^2$.

În coloana a 3-a citim caracteristicile 1 şi 6, cu care se pot forma numerele: 1001 şi 5999; $1001+5999=7000=7\cdot1000=7\cdot10^3$.

În coloana a 4-a citim caracteristicile 5 şi 2, cu care se pot forma numerele: 50001 şi 19999; $5001+19999=70000=7\cdot10^4$.

În coloana 5- citim 4 şi 3, cu care se pot forma numerele: 400001 şi299999; $400001+299999=700000=7\cdot10^5$.

Privind cu atenţie cele prezentate, putem deja răspunde la întrebarea pusă şi anume:

Cu caracteristicile din tabelă se pot forma numere divizibile cu 7, iar suma lor este de forma: $7\cdot10^n$, unde n reprezintă numărul cifrelor suprimate.

Cum se formează numărul de pe direcţia lui minus?

Scriem caracteristica corespunzătoare, urmată de (n-1) zerouri urmate de 1.

Exemplu: Linia lui 17, coloana 9, pe direcţia lui minus, citim caracteristica 12; formăm numărul: $12\underbrace{00000000}_{(9-1)\text{zerouri}}1$

Cum se formează numărul de pe direcţia lui plus?
Micşorăm caracteristica cu o unitate,urmată de n cifre de 9(unde n reprezintă numărul cifrelor suprimate).
Exemplu: Linia lui 53, coloana 10, pe direcţia lui plus, citim caracteristica 46; formăm numărul:45999999999.
Formând numere după aceste procedee, folosind cararacteristicele din tabelă, se pot formula 460 de probleme de tipul:" *Să se arate că numărul format după regulile prezentate, se divide cu numărul prim de pe aceeaşi linie*".
Exemplu:Să se arate că: 29|2200000001.
Deci, tabela cu caracteristicile mai reprezintă şi o culegere cu 460 de probleme de tipul arătat.

BIBLIOGRAFIE

1.I.CREANGĂ,C.CAZAN,P.MIHUŢ,Gh.OPAIŢ,C.REISCHER, Introducere în teoria numerelor, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1965

2.C.P.POPOVICI, Teoria numerelor, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1973

3.C.P.POPOVICI, Logică şi teoria numerelor, Editura didactică şi pedagogică

4.I.CUCUREZEANU, Probleme de aritmetică şi teoria numerelor, Editura tehnică, Bucureşti,1970

5.T.ROMAN,O.SACTER,Gh.D.SIMIONESCU, Probleme date la concursurile de matematică,Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti,1970

6.I.STĂNESCU, Mulţimi de numere, Editura Albatros

7.Colecţia Gazetei matematice, Seria B din anii 1960 - 1992

8.P.RADOVICI-MĂRCULESCU, Probleme de teoria elementară a numerelor, Editura tehnică, 1986

CRITERIA OF DIVISIBILITY FOR NUMBERS WHOSE LAST DIGIT IS 1,3,7 OR 9

ABSTRACT. I have formulated and demonstrated in this work eight theorems representing criteria of divisibility for the numbers having shape : $\overline{a1},\overline{a3},\overline{a7}$ and $\overline{a9}$ (numbers ending in:1,3,7 and 9, where "a" is a digit or a number having more digits).

The generalization we carried out gave us the possibility to formulate a double infinity of criteria for each number from those which we've studied. From the multitude of criteria adequated to the same prime number we can choose our selves a convenient criterion depending on the number we aplly it so that should alow us a rapid decision.

In order to demonstrate the theorems we have used the principle of cancelling the last "n" digits, where $n \in N^*$.

Şcoala nr.6 Baia Mare
4800-Baia Mare
ROMÂNIA

Şcoala nr.15. Baia Mare
4800-Baia Mare
ROMÂNIA