Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.4(1994-1995), 37-44

ECUAŢII EXPONENŢIALE AVÂND EXACT DOUĂ SOLUŢII

Vasile BERINDE

Problema V.12 din [1], care cere să se rezolve ecuaţia

$$4^x 9^{\frac{1}{x}} + 4^{\frac{1}{x}} 9^x = 210, \tag{1}$$

constituie punctul de plecare şi centrul de interes al acestei lucrări. Multe alte probleme înrudite cu (1) au apărut de-a lungul anilor în Gazeta Matematică,

$$4^x 9^{-\frac{1}{x}} + 4^{-\frac{1}{x}} \cdot 9^x = \frac{275}{6},$$

(Pr.19911,G.M.10-11/1983,autor M.Ghiţă)

$$\left(4^x + 9^{\frac{1}{x}}\right)\left(4^{\frac{1}{x}} + 9^x\right) = 1577,$$

(Pr.19984,G.M.1/1984,autor M.O.Drîmbe)

$$(4^x + 9^x)\left(4^{\frac{1}{x}} + 9^{\frac{1}{x}}\right) = 485,$$

(Pr.20516,G.M. 8/1985, autor V.Berinde)

care pot fi abordate în acelaşi fel în care vom trata problema (1) în continuare.

Deşi alcătuiesc o clasă îngustă, interesul iscat în jurul acestor probleme este probat şi de publicarea unei generalizări a problemei (1),

$$a^x b^{\frac{1}{x}} + a^{\frac{1}{x}} b^x = \sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a+b+\sqrt{ab}),\ a,b\in(1,\infty),$$

(Pr.C:117,G.M. 5/1981, autor Gh.Szollosy)

precum şi a lucrării [2], legată de acelaşi subiect.

În continuare ne vom ocupa de ecuaţia

$$a^{cx} b^{\frac{c}{x}} + a^{\frac{c}{x}} b^{cx} = a^{c^2} b + a b^{c^2}, \tag{2}$$

unde $a,b\in(0,\infty)\setminus\{1\}$ şi $c\in\mathbb{R}^*$, din care obţinem, pentru a=2, b=3 şi c=2, tocmai ecuaţia (1).

Vom urmări să obţinem cele mai generale condiţii asupra numerelor a,b şi c care să circumscrie ecuaţia (2) în clasa indicată în titlul lucrării.

O singură privire este suficientă pentru ca ecuaţia, pe cazul general, (2), să-şi divulge imediat o rădăcină: x=c, câtă vreme în forma (1), aceeaşi operaţie este mult mai dificilă.

Cea de-a doua rădăcină este revelată de o proprietate a funcţiei

$$f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\ f(x)=a^{cx} b^{\frac{c}{x}} + a^{\frac{c}{x}} b^{cx},$$

cu $a,b\in(0,\infty)\setminus\{1\}$ şi $c\in\mathbb{R}^*$,

pe care o ataşăm ecuaţiei (2).

Într-adevăr, cum

$$f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)\ \text{,pentru orice } x\in\mathbb{R}^*, \tag{*}$$

deducem că şi $x=\frac{1}{c}$ este soluţie a ecuaţiei, aşadar, (2) posedă soluţiile

$$x=c \text{ şi } x=\frac{1}{c}.$$

Vom căuta condiţii necesare şi suficiente asupra numerelor a,b şi c astfel încât ecuaţia (2) să nu mai aibă alte soluţii înafară de cele menţionate deja.

În acest scop, transformăm ecuaţia (2), împărţind-o membru cu membru prin $ab\neq 0$ şi apoi grupând. Vom obţine

$$a^{c^2-1}\left[\left(a^c b^{-\frac{1}{x}}\right)^{x-c}-1\right]+b^{c^2-1}\left[\left(b^c a^{-\frac{1}{x}}\right)^{x-c}-1\right]=0, \tag{3}$$

care ne arată că este necesar să stabilim relaţii între a^c şi b^c, pe de o parte, şi respectiv b şi a, pe de altă parte.
Obţinem astfel

PROPOZIŢIA 1. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente*

1) $a,b\in(1,\infty)$;

2) $a,b\in\mathbf{R}_+^*$ *şi există* $c>1$ *astfel încât*

$$a^c > b \quad \text{şi} \quad b^c > a. \tag{4}$$

Demonstraţie. Cazul $a=b$ este trivial, astfel că vom considera $a\neq b$.
Fie, spre exemplu, $a<b$ (cazul $a>b$ rezultă din simetria relaţiilor (4)).

"1)→2)" Cum $b>1$, avem $b^x>b>a$, pentru orice $x>1$.
Deoarece $a>1$, $b>1$, ecuaţia

$$a^x = b$$

are o singură soluţie $x_0\in(1,\infty)$. Atunci, pentru orice număr $c>x_0$, are loc (4).

"2)→1)" Presupunem, prin absurd, că avem $a<1$.
Atunci

$$a^c < a < b,$$

ceea ce ar contrazice (4). În concluzie, în ipoteza că 2) este adevărată, trebuie să avem în mod necesar $a>1$, ceea ce implică, ţinând seama că $a<b$, tocmai $b>1$.

Pentru a completa demonstraţia, admitem că am putea avea $b<1$. Atunci rezultă şi $a<1$, astfel că din relaţiile (4) obţinem

$$b^c > a > b^{\frac{1}{c}},$$

ceea ce contrazice faptul că $c>1$. Prin urmare, trebuie să avem în mod necesar $b>1$. Din (4) rezultă acum $a^c>b$, care impune $a>1$.

Demonstraţia este completă.

Folosind propoziţia 1 se demonstrează uşor

PROPOZIŢIA 2. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) $a,b\in(0,1)$;

2) $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ şi există $c>1$ astfel incât

$$a^c < b \text{ şi } b^c < a. \tag{5}$$

Observaţie. Propoziţia 1 este tocmai problema 21776, din G.M. 5/1989, propusă de autorul notei de faţă.

Vom demonstra acum

PROPOZIŢIA 3. *Dacă $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ şi $c>1$ astfel incât*

$$(a^c-b)(b^c-a)>0, \tag{6}$$

atunci ecuaţia (2) are exact două soluţii

$$x=c \quad \text{şi} \quad x=\frac{1}{c}.$$

Demonstraţie. Deosebim cazurile: a) $a^c > b$; b) $a^c < b$.

a) Din condiţia (6) deducem $b^c > a$ şi atunci, conform propoziţiei 1, avem $a>1$ şi $b>1$.

Pentru orice $x\in(1,\infty)$ avem

$$b > b^{\frac{1}{x}} \quad \text{şi} \quad a > a^{\frac{1}{x}} \tag{7}$$

deci ţinând seama de faptul că

$$a^c > b \text{ şi } b^c > a,$$

obţinem

$$a^c>b^{\frac{1}{x}} \quad \text{şi} \quad b^c>a^{\frac{1}{x}},$$

adică

$$a^c b^{-\frac{1}{x}}>1 \quad \text{şi} \quad b^c\cdot a^{-\frac{1}{x}}>1. \tag{8}$$

Prin urmare, ţinând seama de (8), rezultă că, pentru $x\in(1,\infty)$, (3) are loc atunci şi numai atunci când $x_1=c$, altfel membrul stâng este strict negativ (pozitiv).

Pentru $x\in(0,1)$, punând $t=\frac{1}{x}$ şi ţinând seama de proprietatea (*) a funcţiei f şi de rezultatul anterior, obţinem soluţia t=c, adică $x_2=\frac{1}{c}$.

Pentru $x\in(-\infty,0)$, relaţiile (7) mai sunt încă satisfăcute, deci şi relaţiile (8), dar cum $x - c < 0$ înseamnă că membrul stâng al relaţiei (3) este strict negativ, deci nu mai avem nici o soluţie.

b) Din condiţia (6) deducem $b^c < a$, deci, conform propoziţiei 2, avem $a,b\in(0,1)$. Mai departe raţionamentul urmează acelaşi traseu ca şi în cazul a).

Demonstraţia este completă.

Observaţii.

1) Luând a=2, b=3 şi c=2 deducem că ecuaţia (1) are numai soluţiile $x_1 = 2$ şi $x_2=\frac{1}{2}$ şi, evident, $x_1x_2=1$;

2) Pentru $a:=\sqrt{a}, b:=\sqrt{b}$ şi c=2, ecuaţia (2) constituie o extindere a problemei C:117 la cazul $a,b\in(0,1)$;

3) Rezultatele date de propoziţiile 1 şi 2 nu caracterizează doar perechile de numere reale (a,b), ci pot fi generalizate uşor. Lăsăm tot în seama cititorului demonstraţia afirmaţiei următoare.

PROPOZIŢIA 4. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

1) $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (1, \infty)$;

2) $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ *şi există* $c>1$ *astfel încât*

$$a_1^c > a_2, \ldots, a_{n-1}^c > a_n, a_n^c > a_1.$$

În mod analog se extinde şi propoziţia 2 şi cu ajutorul lor se poate rezolva ecuaţia

$$a_1^{cx-1} a_2^{\frac{c}{x}-1} + \ldots + a_{n-1}^{cx-1} a_n^{\frac{c}{x}-1} + a_n^{cx-1} a_1^{\frac{c}{x}-1} = a_1^{c^2-1} + \ldots + a_n^{c^2-1},$$

unde $c>1$ şi $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$ au proprietatea că diferenţele

$$a_1^c - a_2,\ a_2^c - a_3, \ldots, a_n^c - a_1$$

au toate acelaşi semn.

Încheiem cu încă două ecuaţii de acelaşi tip cu cele prezentate la început.

1° $\quad (4^x + 9^x)\left(4^{-\frac{1}{x}} + 9^{-\frac{1}{x}}\right) = \dfrac{485}{6}$,

2° $\quad 2^{2x-1} 3^{\frac{2}{x}-1} + 3^{2x-1} 4^{\frac{2}{x}-1} + 2^{4x+\frac{2}{x}-3} = 99$,

pe care le propunem spre rezolvare cititorului.

Observaţie.

Este valabilă şi reciproca propoziţiei 3: dacă $x=c$ şi $x=\dfrac{1}{c}$ sunt singurele soluţii ale ecuaţiei (2), iar $c>0$, atunci a, b şi c verifică condiţia (6).

Argumentul depăşeşte nivelul clasei a X-a, la care au fost stabilite toate celelalte rezultate, dar el merită totuşi menţionat.

Funcţia f ataşată ecuaţiei (3) este continuă pe $\mathbb{R}^*$.

Dacă $f(c)=0$, $f\left(\dfrac{1}{c}\right)=0$ şi f nu are alte zerouri între $\dfrac{1}{c}$ şi c, înseamnă că f(x) păstrează semn constant pentru x între $\frac{1}{c}$ și c, deci,pe baza echivalenței dintre (2) și (3), rezultă că, pentru orice x între $\frac{1}{c}$ și c, trebuie ca numerele

$$b^c a^{-\frac{1}{x}}-1,\ \ a^c b^{-\frac{1}{x}}-1$$

să aibă același semn. Așadar, cum x=1 se găsește în mod sigur printre aceste valori, deducem tocmai relația (6).

BIBLIOGRAFIE

1. CHIRIAC, V. şi M., Probleme de algebră, Editura Tehnică, Bucureşti, 1977.

2. KONNERTH, O., În legătură cu ecuaţia $a^x b^{\frac{1}{x}} + a^{\frac{1}{x}} b^x = c$, în Gazeta Matematică, nr.2, 1982, 55-56.

EXPONENTIAL EQUATIONS WHICH POSSESS EXACTLY TWO SOLUTIONS

ABSTRACT. This note is concerned with the study of a class of exponential equations which have exactly two solutions on the real axis, x_1 and x_2, such that $|x_1 \cdot x_2| = 1$.

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr.76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA