Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol,4 (1993-1994),45-52

ASUPRA FUNCŢIEI LUI SMARANDACHE

Codruţa CIOBRA, Călin KOBLICSKA

Profesorul român Florentin Smarandache, absolvent al Universităţii din Craiova, publică în 1980 lucrarea " A Function in the Numbers Theory" [3] bazată în special pe reprezentarea numerelor întregi, introducând funcţia numită mai apoi în literatura de specialitate "funcţia lui Samarandache".

Funcţia lui Smarandache se defineşte astfel:

Definiţie. Pentru orice număr întreg nenul n,funcţia $\eta(n)$ este cel mai mic întreg pentru care $(\eta(n))!$ e divizibil cu n.

Funcţia lui Smarandache caracterizează un număr prim astfel:

-fie $p>4$, p este număr prim dacă şi numai dacă $\eta(p)=p$

Exemple

$\eta(2)=2$

$\eta(3)=3$

$\eta(6)=\eta(2\cdot3)=3$

$\eta(7)=7$

$\eta(-8)=\eta(-2^3)=4$

$\eta(15)=\eta(3\cdot5)=5$

$\eta(49)=\eta(7\cdot7)=14$

$\eta(64)=\eta(2^6)=8$

$\eta(71)=71$

$\eta(100)=\eta(2^2\cdot5^2)=10$

Prezentăm pentru început construcţia şi caracterizări ale acestei funcţii, iar în partea a două a lucrării vom da soluţii şi generalizări ale unor probleme propuse în lucrarea Octogon [2].

** Lucrare susţinută la Sesiunea Ştiinţifică a Studenţilor din Universitatea Baia Mare, aprilie 1995, sub îndrumarea lector Iancu Lăcrimioara.*

Lema 1. Oricare ar fi $k,p\in\mathbb{N}^*$ cu $p\neq1$, numărul k se poate scrie în mod unic sub forma:

$$k=t_1a_{n_1}^{(p)}+\ldots+t_la_{n_l}^{(p)}$$

unde $a_{n_i}^{(p)}=\frac{p^{n_i}-1}{p-1}$, $i=\overline{1,l}$ cu $n_1>n_2>\ldots>n_l>0$

şi $1\leq t_j\leq p-1$, $j=\overline{1,l-1}$, $1\leq t_l<p$

$n_i, t_i\in\mathbb{N}$, $i=\overline{1,l}$, $l\in\mathbb{N}^*$

Definiţia 1. Definim funcţia η_p, p=prim>0 ca funcţia $\eta_p:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ ce îndeplineşte relaţiile:

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\eta_p(a_n^{(p)})=p^n$ şi este liniară şi omogenă

$$\eta_p(t_1a_{n_1}^{(p)}+\ldots+t_la_{n_l}^{(p)})=t_1\eta_p(a_{n_1}^{(p)})+\ldots+t_l\eta_p(a_{n_l}^{(p)})$$

Notă. *Funcţia η_p este crescătoare şi nu este injectivă.*

Lema 2. Pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$ scris în mod unic sub forma $k=t_1a_{n_1}^{(p)}+\ldots+t_la_{n_l}^{(p)}$ există unic

$$t_1p^{n_1}+\ldots+t_lp^{n_l}=\eta_p(t_1a_{n_1}^{(p)}+\ldots+t_la_{n_l}^{(p)})=\eta_p^{(k)}$$ unde $t_1p^{n_1}+\ldots+t_lp^{n_l}\in\mathbb{N}^*$

Lema 3. Oricare ar fi $k\in\mathbb{N}^*$ şi oricare ar fi $p\in\mathbb{N}$, $p\geq2$, p-număr prim rezultă că factorialul funcţiei $\eta_p(k)$ este multiplu de p^k

$(\eta_p(k))!=Mp^k$

Teorema 1. *Funcţia η_p, p-prim, definită anterior are următoarele proprietăţi:*

1). $\forall\, k\in\mathbb{N}^*$, $(\eta_p(k))!=Mp^k$

2). $\eta_p(k)$ e cel mai mic număr cu această proprietate.

Definiţia 2. Definim funcţia $\eta:\mathbb{Z}\setminus\{0\}\to\mathbb{N}$ ca fiind funcţia cu următoarele proprietăţi:

a) $\eta(\pm1)=0$

b) $\forall n=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s}$ cu $\varepsilon=\pm1$, p_i=nr. prim, $p_i\neq p_j$ când $i\neq j$

$\alpha_i\geq1$, $i=\overline{1,s}$

$$\eta(n)=\max_{i=\overline{1,s}}\{\eta_{p_i}(\alpha_i)\}$$

Teorema 2.Funcţia η definită mai sus îndeplineşte următoarele proprietăţi:

1)$(\eta(n))!=Mn$, $\forall$ $n\in Z\setminus(0)$

2) $\eta(\eta)$ e cel mai mic număr natural cu această proprietate. Demonstraţiile se găsesc în lucrarea [3]

P1.(PP25 - Pedro Melendez,Belo Horizonte,Brazil,[2])

Să se calculeze $\eta(p^{p+1})$ unde p este un număr prim impar.

Soluţie. Având în vedere că numărul prim p nu se descompune în alţi factori, p se va găsi doar în numere de forma

$1\cdot p, 2\cdot p, 3\cdot p, \ldots, m\cdot p, \ldots, p\cdot p, \ldots$; $m \in \mathbb{N}^*$.

Pentru cazul particular p=3, factorul 3 apare doar în numerele 3,6,9,....Observăm că în numerele 3 şi 6 apare doar o singură dată factorul 3 (3 este la puterea întâi).

În numărul 9 factorul 3 apare de două ori în descompunerea acestui număr (3 este la puterea a doua).

Astfel $\eta(3^4)=\eta(3^3)=9$.

Pentru cazul particular p=5, factorul 5 apare în numerele 5,10,15,20,25,...;În primele patru numere factorul 5 apare doar o singură dată iar în descompunerea lui 25 apare de două ori.

Astfel $\eta(5^6)=\eta(5^5)=25$.

Se observă deci că $\eta(p^p)=\eta(p^{p+1})=p^2$

P2.(PP21 - Thomas Martin,Arizona, USA,[2])

Să se găsească toate numerele întregi pozitive x pentru care 10 este cel mai mic întreg astfel încât 10! se divide prin x, adică să se găsească toate numerele întregi pozitive x pentru care $\eta(x)=10$.

Soluţie. $10!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10 = 2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$

Un număr ce satisface ecuaţia $\eta(x)=10$ trebuie să cuprindă în dezvoltarea lui produs de factori primi 2,3,5,7, la puteri mai mici sau egale cu cele ce apar în dezvoltarea lui 10!

Dacă factorii primi 2,3,5,7 apar la puteri mai mari atunci $\eta(x)>10$.

Numărul x trebuie să conţină în mod obligatoriu pe 2^8 sau 5^2 sau produsul lor $2^8\cdot 5^2$.Acest lucru ne asigură că $\eta(x)=10$ deoarece în dezvoltarea lui 10! avem în numărul 2 un factor 2;în numărul 4 avem 2 factori 2; în numărul 6, un factor 2; în numărul 8 avem 3 factori 2; iar în numărul 10 avem un factor 2, de fapt al 8-lea factor doi din dezvoltarea lui 10!, astfel ajungând ca $\eta(2^8)=10$; de asemenea factorul 5 apare în numărul 5 o dată iar în numărul 10 a doua oară astfel $\eta(5^2)=10$ şi deci şi produsul celor două numere $2^8\cdot 5^2$ verifică $\eta(x)=10$.

Dacă de exemplu numărul x ar conţine în dezvoltarea sa 2^7 iar puterea lui 5 ar fi 0 sau 1 atunci, indiferent de puterile celorlalţi factori (ţinând cont de condiţia pusă anterior) vom avea $\eta(x)<10$.

Astfel pentru $x=2^7\cdot 3\cdot 5$ avem $\eta(x)=8$

Deci numerele căutate vor avea una din formele.

Forma 1° $x=2^8\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d$, unde $0\le b\le 4$, $0\le c\le 2$, $0\le d\le 1$.

Avem $N_1=5\cdot 3\cdot 2 = 30$ astfel de numere.

Forma 2° $x=2^a\cdot 3^b\cdot 5^2\cdot 7^d$, unde $0\le a\le 8$, $0\le b\le 4$, $0\le d\le 1$

Avem $N_2=9\cdot 5\cdot 2 = 90$ astfel de numere.

Forma 3° $x=2^8\cdot 3^b\cdot 5^2\cdot 7^d$, unde $0\le b\le 4$, $0\le d\le 1$

Avem $N_3=5\cdot 2 =10$ astfel de numere.

Deci există $N=N_1+N_2+N_3=130$ numere care îndeplinesc condiţia $\eta(x)=10$.

P3.(Generalizare - Ciobra Codruţa, Koblicska Cătălin)

Să se găsească numerele întregi pozitive x pentru care $\eta(x)=p\cdot q$, unde p şi q sunt numere prime iar $q<p$;

Soluţie. Cum $p>q$ şi p este un număr prim impar şi din problema 1 ştim că $\eta(p^q)=q\cdot p$ în acest caz, atunci înseamnă că x îl conţine pe p^q.

Factorialul numărului $p\cdot q$ este:

$$(p\cdot q)!=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}\cdot p^q\cdot q^\beta$$

unde $p_1,\ldots,p_n$ sunt numere prime.

Numărul x trebuie să cuprindă produs de factori primi $p_1,p_2,\ldots,p_n,p,q$ la puteri mai mici sau egale cu cele ce apar în $(p\cdot q)!$

Dar pentru ca $\eta(x)=p\cdot q$ este obligatoriu ca x să conţină pe p^q sau q^β sau produsul lor $p^q\cdot q^\beta$.

Deci numerele x căutate vor avea una din formele:

Forma 1. $x=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\ldots p_n^{a_n}\cdot p^{q}\cdot q^{s}$ unde $0\le a_i\le\alpha_i$, $i=\overline{1,n}$ *si* $0\le s\le\beta$

Avem $N_1=\left[\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i+1)\right](\beta+1)$ astfel de numere.

Forma 2. $x=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\ldots p_n^{a_n}\cdot p^{t}\cdot q^{\beta}$ unde $0\le a_i\le\alpha_i$, $i=\overline{1,n}$; $0\le t\le q$

Avem $N_2=\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i+1)(q+1)$ astfel de numere.

Forma 3. $x=p_1^{a_1}\cdot p_2^{a_2}\ldots p_n^{a_n}\cdot p^{q}\cdot q^{\beta}$ unde $0\le a_i\le\alpha_i$, $i=\overline{1,n}$

Avem $N_3=\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i+1)$ astfel de numere.

Deci avem $N=N_1+N_2+N_3=\left[\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i+1\right]\,[(\beta+1)+(q+1)+1]$ astfel de numere.

P4.(PP24. Pedro Melendez,Belo Horizonte,Brazil;[2])

Fie m un număr întreg pozitiv fixat.Să se calculeze limita următoare:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\eta(p_k^m)}{p_k}$$

unde p_k e al k-lea număr prim.

Soluţie. Numărul p_k este al k-lea număr prim iar m este fixat, deci de la un rang încolo, când $p_k>m$, şirul $\eta(p_k^m)$ devine staţionar şi are loc proprietatea din problema 1,adică

$$\eta(p_k^m)=m\cdot p_k$$

Atunci $$\lim_{k\to\infty}\frac{\eta(p_k^m)}{p_k}=m$$

P5.(PP20-a); Thomas Martin, Arizona, USA;[2])

Arătaţi că pentru orice k număr real există un şir $\{s_i\}_1$ de numere întregi pozitive pentru care.

$$L=\lim_{i\to\infty}\frac{s_i}{\eta(s_i)}>k.$$

Soluţie. Pentru orice $k\in\mathbb{R}$- fixat construim şirul de forma:

$s_i=p_i\cdot(k+1)$, $i\in\mathbb{N}$ unde p_i- numere prime.

Cum $i\to\infty$, există un rang de la care $p_i>k+1$ şi deci pentru care $\eta(p_i(k+1))=p_i$.

Atunci $\lim_{i\to\infty}\frac{s_i}{\eta(s_i)}=\lim_{i\to\infty}\frac{p_i(k+1)}{\eta(p_i(k+1))}=k+1>k,\ \forall\ k\in\mathbb{R}$ fixat.

P6.(PP20 - b);Thomas Martin, Arizona, USA;[2])

Este limita următoare $+\infty$?

$$L=\lim_{m\to\infty}\frac{m}{\eta(m)}$$

Soluţie.

Considerăm câteva valori arbitrare ale lui m.

Astfel pentru $m=2;\ \eta(2)=2\to\frac{m}{\eta(m)}=1$

pentru $m=5;\ \eta(5)=5\to\frac{m}{\eta(m)}=1$

pentru $m=6;\ \eta(6)=3\to\frac{m}{\eta(m)}=2$

pentru $m=131;\ \eta(131)\to\frac{m}{\eta(m)}=1$

Observăm că pentru m= număr prim, deoarece funcţia lui Smarandache lasă numerele prime pe loc, raportul $\frac{m}{\eta(m)}=1$.

Cum $m\to\infty$ şi cum mulţimea numerelor prime e infinită şirul $m/\eta(m)$ va fi presărat la infinit, din loc în loc cu cifra 1. Astfel şirul nu poate avea limita $+\infty$.

P7. Să se găsească cel mai mic număr natural cu proprietatea:

$n!=M(\mp 2^8\cdot 3^4\cdot 5^{13}\cdot 11^{29})$.

Soluţie. $\eta(\mp 2^8\cdot 3^4\cdot 5^{13}\cdot 11^{29})=\max\{\eta_2(8),\eta_3(4),\eta_5(13),\eta_{11}(29)\}$.

Calculăm $\eta_2(8)$

Construim şirul $(a_n^{(2)})_{n\in N^*}=1,3,7,15,\ldots$

$8=1\cdot 7+1\cdot 1 \Rightarrow \eta_2(8)=\eta_2(1\cdot 7+1\cdot 1)=1\cdot\eta_2(7)+1\cdot\eta_2(1)=$

$=1\cdot\eta_2(a_3^{(2)})+1\cdot\eta_2(a_1^{(2)})=1\cdot 2^3+1\cdot 2^1=8+2=10$

Calculăm $\eta_3(4)$

Construim şirul $(a_n^{(3)})_{n\in N^*}=1,4,13,\ldots$

$4=1\cdot 4\Rightarrow \eta_3(4)=\eta_3(a_2^{(3)})=3^2=9$

Calculăm $\eta_5(13)$

Construim şirul $(a_n^{(15)})_{n\in N^*}=1,6,31,\ldots$

$13=2\cdot 6+1\cdot 1 \Rightarrow \eta_5(13)=\eta_5(2\cdot 6+1\cdot 1)=2\eta_5(6)+1\eta_5(1)=$

$=2\cdot\eta_5(a_2^{(5)})+1\cdot\eta_5(a_1^{(5)})=2\cdot 5^2+1\cdot 5^1=55$

Calculăm $\eta_{11}(29)$

Construim şirul $(a_n^{(11)})_{n\in N^*}=1,12,133,\ldots$

$29=2\cdot 12+5\cdot 1\Rightarrow\eta_{11}(29)=\eta_{11}(2\cdot 12+5\cdot 1)=2\cdot\eta_{11}(12)+5\eta_{11}(1)=$

$=2\cdot\eta_{11}(a_2^{(11)})+5\cdot\eta_{11}(a_1^{(11)})=2\cdot 11^2+5\cdot 11=297$

$\eta(\pm 2^8\cdot 3^4\cdot 5^{13}\cdot 11^{29})=\max(10,9,55,297)=297$

$\Rightarrow 297!=M(\pm 2^8\cdot 3^4\cdot 5^{13}\cdot 11^{29})$ şi e cel mai mic cu această proprietate

P8. Care sunt numerele ale căror factoriale se termină în 2000 de zerouri?

Soluţie. $n=10^{2000}$, $(\eta(n))!=M10^{2000}$ şi e cel mai mic număr

natural
cu această proprietate.

$$\eta(10^{2000})=\eta(2^{2000}\cdot 5^{2000})=\max\{\eta_2(2000),\eta_5(2000)\}=\eta_5(2000)$$

Construim şirul $(a_n^{(5)})_{n\in N^*}=1,6,31,156,781,\ldots$

$$2000=2\cdot 781+2\cdot 156+4\cdot 31+2\cdot 1$$

$$\eta_5(2000)=\eta_5(2\cdot 781+2\cdot 156+4\cdot 31+2\cdot 1)=2\cdot\eta_5(a_5^{(5)})+2\cdot\eta_5(a_4^{(5)})+$$

$$+4\cdot\eta_5(a_3^{(5)})+2\cdot\eta_5(a_1^{(5)})=2\cdot 5^5+2\cdot 5^4+4\cdot 5^3+2\cdot 5^1=8010$$

BIBLIOGRAFIE

[1] DUMITRESCU, C. : A Brief History of the " Smarandache Function", Octogon - mathematical magazine, Braşov, Vol.II, nr.1, Aprilie 1994, p.15-16.

[2] x x x " Proposed problems ", Octogon - mathematical magazine, Braşov, Vol.2, nr.1, Aprilie 1994, p.31

[3] SMARANDACHE, F. :" A Function in the Number Theory ", Analele Universităţii Timişoara, seria Ştiinţe matematice, Vol.18, p.79-88.

ON THE SMARANDACHE FUNCTION

ABSTRACT. The paper contains some exercises - with hints and solutions - which reveal some interesting properties of the Smarandache function.

Universitatea din Baia Mare
Str.Victoriei nr.76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA