Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.4(1994-1995), 53-58

UN EXEMPLU DE GRUP TERNAR DEFINIT PE PUNCTELE UNEI HIPERBOLE

Anca MIHIŞ MOYS *

În lucrările [1], [2] şi [3] se definesc structuri algebrice pe punctele unei parabole şi ale unei elipse. Pornind de la aceste rezultate, în cele ce urmează, vom defini analog o operaţie ternară pe mulţimea punctelor unei hiperbole, conferindu-i acestei mulţimi o structură de grup ternar, respectiv grup.
În felul acesta, rezultatele din lucrările anterioare pot fi generalizate pe mulţimea punctelor oricărei conice nedegenerate.

Fie $\mathcal{H}$ mulţimea punctelor unei hiperbole. Definim pe $\mathcal{H}$ operaţia ternară $\circ:\mathcal{H}^3 \to \mathcal{H}$ astfel:

1) Dacă $M_1,M_2,M_3 \in \mathcal{H}$ sunt distincte şi tangenta în M_2 la hiperbolă nu este paralelă cu dreapta M_1M_3, atunci $(M_1,M_2,M_3)_\circ = M$ unde M este punctul în care paralela dusă prin M_2 la M_1M_3 retaie hiperbola;

2) Dacă $M_1,M_2,M_3 \in \mathcal{H}$ şi tangenta în M_2 la hiperbolă este paralelă cu M_1M_3, atunci $(M_1,M_2,M_3)_\circ = M_2$;

---

* *Lucrare prezentată la Sesiunea Ştiinţifică a Studenţilor, aprilie 1995, Universitatea Baia Mare, sub indrumarea conf.dr.Pop S. Maria*

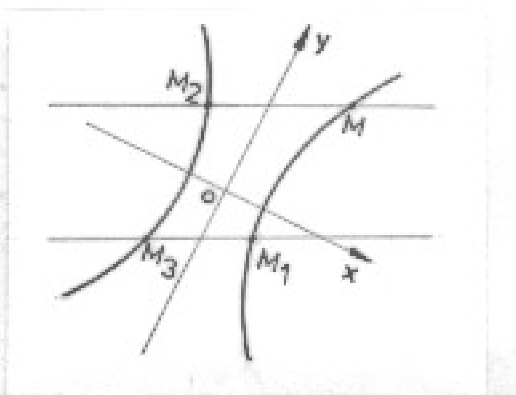
3) Dacă $M_1=M_3\neq M_2$ atunci $(M_1,M_2,M_1)_\circ = M_4$ unde M_4 este punctul în care paralela dusă prin M_2 la tangenta în M_1 la hiperbolă retaie hiperbola;

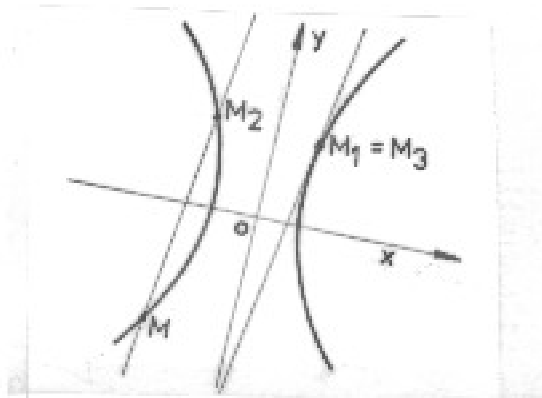
4) Dacă $M_1=M_3\neq M_2$ şi tangentele în M_1 şi M_2 sunt paralele, atunci $(M_1,M_2,M_1)_\circ = M_2$.

5) Dacă $M_1=M_2\neq M_3$ atunci $(M_1,M_1,M_3)_\circ = M_3$

6) Dacă $M_1\neq M_2 = M_3$, atunci $(M_1,M_2,M_2)_\circ = M_1$

7) Dacă $M_1=M_2=M_3$, atunci $(M_1,M_1,M_1)_\circ = M_1$





Teoremă. *$(\mathcal{H},\circ)$ este un grup ternar semicomutativ, cu toate elementele idempotente, fără unitate, izomorf cu grupul ternar $(\mathbb{R},*)$ unde $*:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(t_1,t_2,t_3)_* = t_1-t_2+t_3$.*

Demonstraţie. Raportând $\mathcal{H}$ la un reper determinat de focarele F_1 şi F_2 (axa OX) şi mediatoarea segmentului F_1F_2 (axa OY) se poate defini hiperbola analitic, astfel:

$$H = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

În cele ce urmează folosim ecuaţiile parametrice ale hiperbolei:

$$\begin{cases} x = a\,ch t \\ y = b\,sh t,\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Pe mulţimea $\mathcal{H}=\{M(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x=a\ cht,\ y=b\ sht; t\in\mathbb{R}\}$ definim operaţia "$\circ$" ca şi mai sus: $(M_1,M_2,M_3)\to M$ unde $M_i(a\ cht_i, b\ sht_i)$, $i=1,2,3$; $M(a\ cht,\ b\ sht)$.

Pentru determinarea lui t tratăm următoarele cazuri:

1) Cazul $M_1\neq M_3$ deci $t_1\neq t_3$

Dreptele M_1M_3 şi M_2M sunt paralele dacă şi numai dacă $m_{M_1M_3}=m_{MM_2}$.

Deoarece pentru $t_3+t_1\neq 0$ avem

$$m_{M_1M_3}=\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}=\frac{b(sh\,t_3-sh\,t_1)}{a(ch\,t_3-ch\,t_1)}=\frac{b\cdot 2\,sh\frac{t_3-t_1}{2}\,ch\frac{t_3+t_1}{2}}{a\,2\,sh\frac{t_3-t_1}{2}\,sh\frac{t_3+t_1}{2}}=\frac{b}{a}cth\frac{t_3+t_1}{2}$$

şi coeficientul unghiular al dreptei M_2M este $m_{M_2M}=\frac{b}{a}cth\frac{t+t_2}{2}$, din

paralelismul dreptelor M_1M_3 şi MM_2 avem $cth\frac{t_3+t_1}{2}=cth\frac{t+t_2}{2}$.

Cum funcţia $cth:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$ este bijectivă, rezultă $t=t_1-t_2+t_3$.

Observaţie. Dacă M_3 este simetric cu M_1 faţă de axa OX, adică $t_1+t_3=0$, atunci $M_1M_3\parallel OY$. Ecuaţia dreptei M_3M_1 este $x=a\ ch\ t_1$ iar paralela dusă prin M_2 la ea are ecuaţia $x = a\ cht_2$. Această dreaptă retaie hiperbola în punctul M:

$$\frac{a^2ch^2t_2}{a_2}-\frac{y^2}{b^3}=1\to y^2=b^2(ch^2t_2-1)\quad \text{deci}\quad y=\pm b\,sh\,t_2,$$

unde $y = b\ sht_2$ corespunde punctului M_2 iar $y = b\ sh(-t_2)$ corespunde punctului $M = (M_1,M_2,M_3)$. Punctul $M(a\ ch(-t_2),\ b\ sh(-t_2))$ este simetricul lui M_2 fata de axa OX.

Deoarece $t_1 = -t_3$, putem scrie şi în acest caz $t_M = -t_2 = t_1-t_2+t_3$.

2) Cazul $M_1 = M_3 (t_1 = t_3)$

Dreptele MM_2 şi tangenta la hiperbolă în M_1 notată pe scurt tg M_1 sunt paralele dacă şi numai dacă au acelaşi coeficient unghiular $m_{MM_2}=m_{tgM_1}$.

Deoarece $$m_{tgM_1}=\frac{y'(t_1)}{x'(t_1)}=\frac{b\,ch\,t_1}{a\,sh\,t_1}=\frac{b}{a}ch\,t_1$$

şi

$m_{MM_2}=\frac{b}{a}cth\frac{t+t_2}{2}$ obţinem $cth\,t_1=cth\frac{t+t_2}{2}$ de unde rezultă

$$t=2t_1-t_2=t_1-t_2+t_3 \quad \text{căci} \quad t_1=t_3 \ .$$

Analog, în toate celelalte situaţii, se deduce $t=t_1-t_2+t_3$.
Prin urmare putem uniformiza" definiţia punctului obţinut ca rezultat al operaţiei ternare $(M_1,M_2,M_3)_\circ$ ca fiind

$M(a\,ch(t_1-t_2+t_3),b\,sh(t_1-t_2+t_3))$.

Se verifică uşor că $(\mathbb{R},*)$ este un grup ternar semicomutativ, cu toate elementele idempotente, fără unitate.

Aplicaţia $f:\mathcal{H}\to\mathbb{R}$, $f(M)=t$ care asociază fiecărui punct $M(a\,ch\,t, b\,sh\,t)$ al hiperbolei numărul real t este o bijecţie.

Mai mult, conform celor mai înainte demonstrate, avem: $f((M_1,M_2,M_3)_\circ)=t_1-t_2+t_3=(f(M_1),f(M_2),f(M_3))_*$ ceea ce ne arată că perechea $(\mathcal{H},\circ)$ este de asemenea un grup ternar semicomutativ, fără unitate, cu toate elementele idempotente.

Consecinţa 1. *Grupul ternar $(\mathcal{H},\circ)$ este izomorf cu grupul ternar $(U,\odot)$ al numerelor complexe de modul 1, unde operaţia $\odot: U^3\to U$ se defineşte:*

$$(z_1,z_2,z_3)_\odot=\frac{z_1\cdot z_3}{z_2}\ ,\ (\forall)\ z_1,z_2,z_3\in U\ .$$

Demonstraţie. Aplicaţia $f:U\to\mathbb{R}; f(z)=\arg z$ este bijectivă şi

$$f((z_1,z_2,z_3)_\circ)=f\left(\frac{z_1\cdot z_3}{z_2}\right)=arg\frac{z_1\cdot z_3}{z_2}=argz_1-argz_2+argz_3=$$

$=f(z_1)-f(z_2)+f(z_3)=(f(z_1),f(z_2),f(z_3))_*$,deci $(U,\circ)\approx(\mathbb{R},*)$ şi conform teoremei precedente avem $(U,\circ)\approx(\mathcal{H},\circ)$.

Dacă fixăm punctul M_2 în punctul $A(a,0)$, atunci operaţia binară $(\oplus):\mathcal{H}^2\to\mathcal{H}$, $M_1\oplus M_3=(M_1,A,M_3)_\circ$ defineşte pe mulţimea punctelor hiperbolei un grup abelian cu unitatea în A, izomorf cu grupul aditiv al numerelor reale care la rândul lui este izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor complexe de modul 1.

Consecinţa 2. *Dacă pe mulţimea punctelor unei hiperbole $\mathcal{H}$ definim operaţia binară $\oplus$: $\mathcal{H}^2\to\mathcal{H}$:*

$$M_1\oplus M_2=\begin{cases}\text{punctul în care paralela prin vârful } A \text{ al hiperbolei la}\\ M_1M_2, \text{ (pentru } M_1\neq M_2) \text{ respectiv la tangenta în } M_1 \text{ la } \mathcal{H}\\ \text{(pentru } M_1=M_2) \text{ retaie hiperbola;}\\ A, \text{ dacă } M_2 \text{ este simetricul lui } M_1 \text{ faţă de axa focarelor}\\ \text{sau } M_1=M_2=A,\end{cases}$$

atunci $(\mathcal{H},\oplus)$ este un grup abelian cu unitatea A şi inversul fiecărui punct simetricul lui faţă de axa hiperbolei.

BIBLIOGRAFIE

[1]POP S.Maria, Structuri algebrice ternare definite pe punctele unei parabole, vol.II (1992-1993), pag.25-40

[2]POP S.Maria, Structuri algebrice definite pe punctele unei parabole, Gazeta Matematică nr.8/1985

[3]POP S.Maria,Un exemplu de grup ternar definit pe punctele unei elipse,Lucrările Seminarului de Creativitate Matematică,vol.III (1993-1994)

AN EXAMPLE OF TERNARY GROUP DEFINED ON THE POINTS OF A HYPERBOLE

ABSTRACT. Let $\mathcal{H}$ be the points set of a hyperbole and $\bigcirc:\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ a ternary operation defined as follows:

-If $M_1 \neq M_2 \neq M_3$ then $(M_1, M_2, M_3)_\circ$ is the point in which the parallel of M_1M_3 (or of the tangent to $\mathcal{H}$ in M_1, if $M_1 = M_3$) through M_2 intersects again the hyperbole;

-If the tangent to $\mathcal{H}$ in M_2 is parallel to M_1M_3, then $(M_1, M_2, M_3)_\circ = M_2$.

-If $M_1 = M_2$, then $(M_1, M_1, M_3)_\circ = (M_3, M_1, M_1)_\circ = M_3$.

$(\mathcal{H}, \bigcirc)$ is an semicommutative ternary group isomorphic to the

3-group $(U, \odot)$, where $U = \{z \in \mathbf{C};|z| = 1\}$; $\odot: U^3 \to U; (z_1, z_2, z_3)_\odot = \frac{z_1 z_3}{z_2}$ and

to the 3-group $(\mathbb{R}, *)$; $*: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $(t_1, t_2, t_3)_* = t_1 - t_2 + t_3$.

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr.76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA