Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.4(1994-1995), 59-66

ASUPRA UNOR PROBLEME DE ARII

Dorin ANDRICA și Nicolae MUŞUROIA

În această lucrare se utilizează o metodă unitară de rezolvare și generalizare a unor probleme referitoare la ariile unor poligoane, metodă ce se bazează pe numerele complexe.

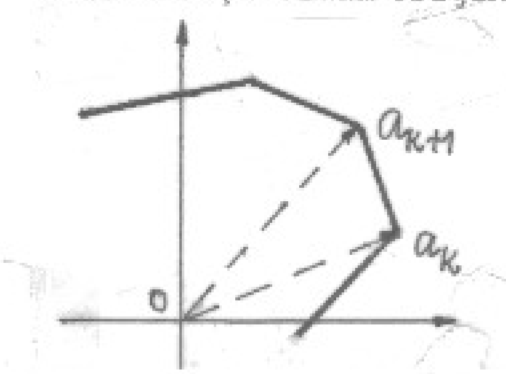
Fie $A_1, A_2 \dots A_n$ un poligon convex. Notăm cu litere mici corespunzătoare, afixele vârfurilor.

Teorema.([1] pag.68) Aria poligonului convex $A_1A_2\dots A_n$ este:

$$\sigma\ [\ A_1A_2\dots A_n\ ] = \frac{1}{2}\ I_m\left(\sum_{k=1}^{n}\overline{a_k}\ a_{k+1}\right) \qquad (1)$$

unde $a_{n+1}=a_1$

Demonstrație. Luăm originea sistemului de coordonate O în interiorul poligonului.



Fie $a_k=r_k(\cos t_k+i\sin t_k)$, $k=\overline{1,n}$

Atunci: $\frac{1}{2}I_m(\sum_{k=1}^{n}\overline{a_k}\ a_{k+1}=$

$$=\frac{1}{2}\ I_m\left[\ \sum_{k=1}^{n} r_k\ r_{k+1}\overline{(\cos t_k+i\sin t_k)}\cdot(\cos t_{k+1}+i\sin t_{k+1})\right]=$$

$$=\frac{1}{2}I_m\left[\sum_{k=1}^{n} r_k r_{k+1}(\cos(t_{k+1}-t_k)+i\sin(t_{k+1}-t_k))\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r_k r_{k+1}\sin(t_{k+1}-t_k)=\sum_{k=1}^{n}\sigma[OA_kA_{k+1}]=\sigma[A_1A_2\ldots A_n]$$

Observaţie. Alegerea punctului O în interiorul poligonului nu afectează generalitatea formulei (1). Arătăm că aceasta rămâne invariantă la orice translaţie. Fie $z\in\mathbf{C}$, un număr oarecare. Atunci:

$$I_m\left[\sum_{k+1}^{n}\overline{(a_k+z)}(a_{k+1}+z)\right]=I_m\left[\sum_{k=1}^{n}(\overline{a}_k+\overline{z})(a_{k+1}+z)\right]=$$

$$=I_m\left(\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_k a_{k-1}\right)+I_m\left[(\overline{a}_k\ z+z\overline{a_{k+1}})+n\ z\ \overline{z}\ \right]=$$

$$I_m\left(\sum_{k=1}^{n}\overline{a}_k\ a_{k+1}\right)$$

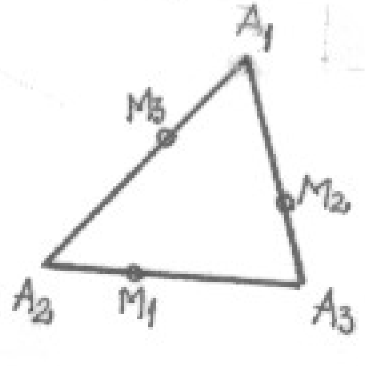
Aplicaţia 1. În triunghiul $A_1A_2A_3$ fie $M_1\in A_2A_3, M_2\in A_1A_3, M_3\in A_1A_2$ astfel încât:

$$\frac{M_1M_2}{M_1A_3}=\lambda_1,\quad \frac{M_2A_3}{M_2A_1}=\lambda_2,\quad \frac{M_3A_1}{M_3A_2}=\lambda_3,$$

atunci:

$$\sigma[M_1M_2M_3]=\frac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}\cdot\sigma[A_1A_2A_3]$$

Soluţie.



Avem: $m_1=\dfrac{a_2+\lambda_1 a_3}{1+\lambda_1}$

$$m_2=\frac{a_3+\lambda_2 a_1}{1+\lambda_2}$$

$$m_3=\frac{a_1+\lambda_3 a_2}{1+\lambda_3}$$

Deci:

$$\sigma[M_1M_2M_3]=\frac{1}{2}I_m\left[\overline{\frac{a_2+\lambda_1a_3}{1+\lambda_1}}\cdot\frac{a_3+\lambda_2a_2}{1+\lambda_2}+\right.$$

$$\left.+\overline{\frac{a_3+\lambda_2a_1}{1+\lambda_2}}\cdot\frac{a_1+\lambda_3a_2}{1+\lambda_3}+\overline{\frac{a_1+\lambda_3a_2}{1+\lambda_3}}\cdot\frac{a_2+\lambda_1a_3}{1+\lambda_1}\right]=$$

$$\frac{1}{2}I_m\left[\frac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}\cdot(\overline{a_1}\,a_2+\overline{a_2}\,a_3+\overline{a_3}\,a_1)\right]=$$

$$=\frac{1+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)}\sigma[A_1A_2A_3]$$

Observaţii: 1) Pentru $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ obţinem problema 5 pag.135 din [3].

2) Dacă M_1,M_2,M_3 reprezintă picioarele bisectoarelor interioare ale unui triunghi ABC atunci:

$$\sigma[M_1M_2M_3]=\frac{2abc}{(a+c)(b+c)(a+c)}\sigma[ABC]$$

deoarece $\lambda_1=\frac{M_1B}{M_1C}=\frac{c}{b}$ şi analoagele.

3) Dacă M_1,M_2,M_3 reprezintă picioarele bisectoarelor exterioare ale triunghiului neisoscel ABC, atunci punctele M_1,M_2,M_3 sunt colineare, deoarece:

$\lambda_1=-\frac{c}{b}$, $\lambda_2=-\frac{a}{c}$, $\lambda_3=-\frac{b}{a}$ şi $\sigma[M_1M_2M_3]=0$

4) Aria triunghiului ortic A'B'C' al unui triunghi ascuţitunghic ABC este:

$$\sigma[A'B'C']=2\cos A\cos B\cos C\,\sigma[ABC]$$

deoarece $\lambda_1=\frac{A'B}{A'C}=\frac{c\cos B}{b\cos C}$ şi analoagele.

Aplicaţia 2. Fie $A_1A_2A_3A_4$ un patrulater convex şi

$M_1 \in (A_1A_2)$, $M_2 \in (A_2A_3)$, $M_3 \in (A_3A_4)$, $M_4 \in (A_4A_1)$ astfel încât: $\frac{A_1M_1}{M_1A_2} = \frac{A_3M_3}{M_3A_4} = \lambda$

şi $\frac{A_2M_2}{M_2A_3} = \frac{A_4M_4}{M_4A_1} = \lambda'$

atunci $\sigma[M_1M_2M_3M_4] = \frac{1+\lambda\lambda'}{(1+\lambda)(1+\lambda')}\sigma[ABCD]$

Soluţie. Avem:

$$m_1 = \frac{a_1+\lambda a_2}{1+\lambda}, \quad m_2 = \frac{a_2+\lambda' a_3}{1+\lambda'} \quad m_3 = \frac{a_3+\lambda a_4}{1+\lambda}, \quad m_4 = \frac{a_4+\lambda' a_1}{1+\lambda'}$$

$$I_m(\overline{m_1}m_2) = \frac{1}{(1+\lambda)(1+\lambda')} I_m\left[(\overline{a_1}+\lambda\overline{a_2})(a_2+\lambda' a_3)\right] =$$

$$= \frac{1}{(1+\lambda)(1+\lambda')} I_m\left[\overline{a_1}a_2 + \lambda'\overline{a_1}a_3 + \lambda\lambda'\overline{a_2}a_3\right]$$

şi analoagele. Inlocuind, obţinem:

$$\sigma[M_1M_2M_3M_4] = \frac{1}{2}\frac{1+\lambda\lambda'}{(1+\lambda)(1+\lambda')} I_m(\overline{a_1}a_2 + \overline{a_2}a_3 + \overline{a_3}a_4 + \overline{a_4}a_1)$$

$$= \frac{1+\lambda\lambda'}{(1+\lambda)(1+\lambda')}\sigma[A_1A_2A_3A_4]$$

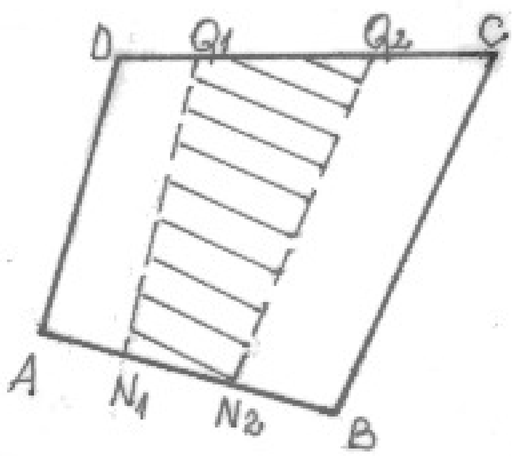
Observaţie. Pentru $\lambda=\lambda'$, obţinem problema 4 pag.71 din [1]

Aplicaţia 3. Fie ABCD un patrulater oarecare iar $\lambda \in (0,1/2)$ un număr real. Considerăm punctele $N_1, N_2 \in (AB)$, $Q_1, Q_2 \in (CD)$ astfel încât:

$AN_1 = BN_2 = \lambda AB$
$DQ_1 = CQ_2 = \lambda DC$

Atunci: $\sigma[Q_1Q_2N_2N_1]=(1-2\lambda)\sigma[ABCD]$.

Demonstraţie:



Avem:

$q_1=(1-\lambda)d+\lambda c$

$q_2=\lambda d+(1-\lambda)c$

$n_1=)1-\lambda)a+\lambda b$

$n_2=\lambda a+(1-\lambda)b$

Atunci: $\sigma[Q_1Q_2N_2N_1]=\frac{1}{2}I_m[\overline{q_1}\,q_2+\overline{q_2}\,n_2+\overline{n_2}\,n_1+\overline{n_1}q_1]=$

$=(1-2\lambda)\cdot\frac{1}{2}\,I_m(\overline{d}c+\overline{c}b+\overline{b}a+\overline{a}d)=(1-2\lambda)\sigma[ABCD]$, deoarece:

$I_m(\overline{q_1}q_2)=I_m([(1-\lambda)\overline{d}+\lambda\overline{c}]\cdot[\lambda d+(1-\lambda)c])=$

$=I_m[(1-\lambda)\lambda\overline{d}d+\lambda(1-\lambda)\overline{c}c+(1-\lambda)^2\overline{d}c+\lambda^2\overline{c}d]=$

$=(1-2\lambda)I_m\overline{d}c$ şi analog pentru celelalte.

Observaţii: 1)Pentru $\lambda=\frac{n}{2n+1}$ obţinem rezultatul din [4] care generalizează o problemă de admitere la Institutul Politehnic din anul 1984, pentru $\lambda=\frac{1}{3}$

2) Demonstraţia din [5], foloseşte efectiv faptul că $\lambda\in\mathbb{Q}$

3) În condiţiile aplicaţiei 3 şi dacă în plus

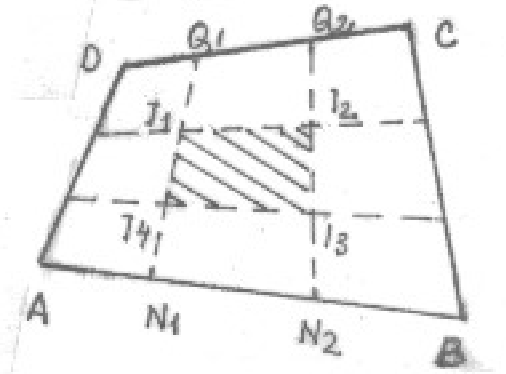
considerăm: $M_1, M_2 \in (AD)$, $P_1, P_2 \in (BC)$

astfel încât: $\begin{cases} DM_1 = AM_2 = t \cdot AD \\ CP_1 = BP_2 = t \cdot BC, \ t \in (0, \frac{1}{2}) \end{cases}$

atunci $\sigma[I_1 I_2 I_3 I_4] = (1-2\lambda)(1-2t)\sigma[ABCD]$

unde: $\{I_1\} = Q_1N_1 \cap M_1P_1$, $\{I_2\} = Q_2N_2 \cap M_1P_1$
$\{I_3\} = Q_2N_2 \cap M_2P_2$, $\{I_4\} = Q_1N_1 \cap M_2P_2$

Demonstrație



Fie $Q_1I_1 = kQ_1N_1$ $k \in (0,1)$
$M_1I_1 = \mu M_1P_1$, $\mu \in (0,1)$
Atunci:
$(1-k)q_1 + kn_1 = (1-\mu)m_1 + \mu p_1$,
adică:
$k(n_1 - q_1) + \mu(m_1 - p_1) = m_1 - q_1$

Deci: $\begin{cases} K[Re(n_1) - Re(q_1)] + \mu[Re(m_1) - Re(p_1)] = Re(m_1) - Re(q_1) \\ K[I_m(n_1) - I_m(q_1)] + \mu[I_m(m_1) - I_m(p_1)] = I_m(m_1) - I_m(q_1) \end{cases}$

Obținem $K = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, unde:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} Re(m_1) - Re(q_1) & Re(m_1) - Re(p_1) \\ Im(m_1) - I_m(q_1) & Im(m_1) - Im(p_1) \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} m_1 - q_1 & m_1 - p_1 \\ \overline{m_1} - \overline{q_1} & \overline{m_1} - \overline{p_1} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{t}{2} Im[tb\overline{a} + (\lambda + t - 1)a\overline{c} + (1-\lambda)a\overline{d} + \lambda b\overline{c} + (t-\lambda)b\overline{d} + (t-1)c\overline{d}].$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} Re(n_1) - Re(q_1) & Re(m_1) - Re(p_1) \\ Im(n_1) - Im(q_1) & Im(m_1) - Im(p_1) \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{2} Im[tb\overline{a} + (\lambda + t - 1)a\overline{c} + (1-\lambda)a\overline{d} + (t-\lambda)b\overline{d} + (t-1)c\overline{d}]$$

Deci $K = t$ și $Q_1I_1 = tQ_1N1$

Analog obținem $N_1I_4=tQ_1N_1$, $Q_2I_2=tQ_2N_2$, $N_2I_3=tQ_2N_2$

Atunci pentru patrulaterul $Q_1Q_2N_2N_1$ avem:

$$\sigma[I_1I_2I_3I_4]=(1-2t)\sigma[Q_1Q_2N_2N_1]=(1-2t)(1-2\lambda)\sigma[ABCD]$$

Observație:

În cazul particular: $\lambda=\frac{n}{2n+1}$, $t=\frac{m}{2m+1}$; $n,m\in\mathbb{N}^*$, obținem rezultatul din [4].

BIBLIOGRAFIE

1.ANCA,D.,Exprimarea ariei unui poligon convex cu ajutorul numerelor complexe ,Buletin matematic,Târgovişte 1987.

2.BRÎNZEI,D.,şi colab.,Planul şi spaţiul euclidian,Editura Academiei,Bucureşti 1986.

3.COŢA,A.,RADO,M.,şi colab.Geometrie şi Trigonometrie, Manual pentru clasa a IX-a, E.D.P.Bucureşti 1985.

4.DRĂGHICESCU,I.C., Asupra unor probleme de arii în patrulatere convexe, G.M. 10/1990.

5.MIHĂILEANU,N., Lecţii complementare de geometrie, Eitura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1976.

ON SOME PROBLEMS OF AREAS

ABSTRACT. In this paper an unified method is used to solve and generalize some problems concerning the computation of the area of convex polygons. This method is based on complex numbers arguments.

Universitatea " BABEŞ BOLYAI "
3400-CLUJ - NAPOCA
ROMÂNIA

Colegiul " GHEORGHE ŞINCAI "
4800 - BAIA MARE
ROMÂNIA