Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.4(1993-1994), 67-72

AUTOMORFISME INTERIOARE ÎN GRUPURI TERNARE

Crina GEORGESCU*

În teoria grupurilor un rol important îl joacă automorfismele interioare; mulţimea lor inzestrată cu operaţie de compunere se demonstrează că este un divizor normal al grupului tuturor automorfismelor acelui grup.

În cele ce urmează vom extinde noţiunea de automorfism interior pentru grupuri ternare.

Fie A o mulţime şi operaţia ternară $\circ: A^3 \to A$ care face să-i corespundă fiecărui triplet de elemente $a_1, a_2, a_3 \in A$ un element din A notat $(a_1, a_2, a_3)_\circ$.

Definiţia 1: Perechea (A,o) se numeşte **grup ternar**, dacă operaţia "o" este asociativă, adică $(\forall) a \in A;\ i=\overline{1,5}$, avem:

(1) $((a_1, a_2, a_3)_\circ, a_4, a_5) = (a_1, (a_2, a_3, a_4)_\circ a_5)_\circ = (a_1, a_2, (a_3, a_4, a_5)_\circ)_\circ$

şi ecuaţiile

(2) $(a, b, x)_\circ = c;\ (a, y, b)_\circ = c;\ (z, a, b,)_\circ = c$

au soluţie unică în A, $(\forall)\, a, b, c \in A$

** Lucrare premiată la Sesiunea Ştiinţifică a Studenţilor, Universitatea din Baia Mare, aprilie 1994, sub îndrumarea conf.univ.dr.Maria S.Pop şi lector Lăcrimioara Iancu.*

Definiţia 2: Dacă a=b=c, atunci soluţia celor trei ecuaţii de tip (2) este aceaşi, numită **transversala** lui a, notată prin $\bar{a}$.
Se demonstrează uşor că transversala poate ocupa orice loc în egalitatea de definiţie şi are următoarele proprietăţi:

Proprietăţi. Dacă $(A,\circ)$ este un grup tenar şi $a,b,c\in A$, atunci:
1° $(x,a,\bar{a})=(x,\bar{a},a)_\circ=(\bar{a},a,x)_\circ=(a,\bar{a},x)_\circ=x,\ (\forall)x\in A;$ (3)
2° $\bar{\bar{a}}=a;$
3°. Soluţiile ecuaţiilor(2) pot fi scrise cu ajutorul transversalelor respectiv astfel:

$$x=(\bar{b},\bar{a},c)_\circ;\ y=(\bar{a},c,\bar{b})_\circ;\ z=(c,\bar{b},\bar{a})_\circ \tag{4}$$

4° $\overline{(a,b,c)}_\circ=(\bar{c},\bar{b},\bar{a})_\circ\ (\forall)a,b,c\in A$

Definiţia 3: Fiind date numerele ternare $(A,\circ),(B,*)$, spunem că $f:A\to B$ este un **omomorfism**, dacă $(\forall)x_1,x_2,x_3\in A$, avem:

$$f((x_1,x_2,x_3)_\circ)=(f(x_1)f(x_2)f(x_3))_* \tag{5}$$

Un omomorfism bijectiv se numeşte izomorfism.
Dacă A=B şi f este izomorfism, atunci f se numeşte automorfism al grupului ternar$(A,\circ)$

Observaţie. Dacă $f:A\to B$ este un omomorfism de grupuri ternare atunci pentru orice $a\in A$ avem $f(\bar{a})=\overline{f(a)}$.
Se demonstrează uşor că mulţimea AutA a automorfismelor unui grup ternar formează un grup în raport cu compunerea.

În cazul binar (n=2),$(A,\cdot)$=grup, definind aplicaţia

$i_a:A\to A,\ i_a(x)=a^{-1}xa\Rightarrow a\,i_a(x)=x\cdot a$,

se demonstrează că i_a este automorfism al lui A, numit interior.

Mulţimea automorfismelor interioare ale unui grup ternar:

$$\mathrm{Int}(A)=\{i_a:A\to A,\ a\in A\}$$

este divizor normal al grupului în raport cu operaţia de compunere.

Generalizăm pentru n=3 aceas rezultat.

Teorema 1: *Fie* $(A,\circ)$ *un grup ternar. Aplicația:* $f_{a_1a_2}: A \to A$, *cu proprietatea:* $(a_1, a_2, f_{a_1a_2}(x))_\circ = (x, a_1, a_2)_\circ \Leftrightarrow f_{a_1a_2}(x) = (\overline{a_2}, \overline{a_1}, (x, a_1, a_2)_\circ)_\circ$ *(6)* este un automorfism.

Demonstrație: Arătăm că f este un omomorfism bijectiv.
Într-adevăr,

$$(\forall)\, x_1, x_2, x_3 \subset A,\ f_{a_1a_2}((x_1, x_2, x_3)_\circ) = (f_{a_1a_2}(x_1), f_{a_1a_2}(x_2), f_{a_1a_2}(x_3))_\circ$$

deoarece:

$$(f_{a_1a_2}(x_1), f_{a_1a_2}(x_2), f_{a_1a_2}(x_3))_\circ = (\overline{a_2}, \overline{a_1}, (x_1, a_1, a_2)_\circ)_\circ, (\overline{a_2}, \overline{a_1}, (x_2, a_1, a_2)_\circ)_\circ,$$

$$, (x_3, a_1, a_2)_\circ)_\circ)_\circ = ((\overline{a_2}, \overline{a_1}, (x_1, a_2, \overline{a_1})_\circ)_\circ, (x_2, a_1, \overline{a_1})_\circ, (x_3, a_1, a_2)_\circ)_\circ =$$

$$= ((\overline{a_2}, \overline{a_1}, x_1)_\circ, x_2 (x_3, a_1, a_2)_\circ)_\circ = (\overline{a_2}, \overline{a_1}, (x_1, x_2, x_3)_\circ, a_1, a_2)_\circ = f_{a_1a_2}((x_1 x_2 x_3)_\circ)$$

Deci f este omomorfism.

Fie $f(x_1) = f(x_2)$, deci $(\overline{a_2}, \overline{a_1}(x_1, a_1, a_2)_\circ)_\circ = (\overline{a_2}, \overline{a_1}, (x_2, a_1, a_2)_\circ)_\circ$.
De aici rezultă conform unicității soluției ecuației în grupul ternar că: $(x_1, a_1, a_2)_\circ = (x_2, a_1, a_2)_\circ$, *ceea ce implică* $x_1 = x_2$.
Aceasta demonstrează că f este injectivă.
De asemenea $(\forall)\, y \in A$, $(\exists)\, x = (a_1, a_2, y)_\circ, \overline{a_2}, \overline{a_1})_\circ \in A$ *a.i* $f_{a_1a_2}(x) = y$, adică f este surjectivă.
Am demonstrat astfel că omomorfismul f este bijectiv, deci f este automorfism al grupului ternar.

Observație. Deoarece aplicația f_{a_1,a_2} este bijectivă rezultă că $(\exists)\, f^{-1}(x) = (a_1, a_2, (x, \overline{a_2}, \overline{a_1})_\circ)_\circ$ cum $\overline{\overline{a_1}} = a_1$ *si* $\overline{\overline{a_2}} = a_2$ de aici avem $f^{-1}_{a_1,a_2} = f_{\overline{a_2},\overline{a_1}}$

Definiţia 4: Automorfismul $f:A\to A$ definit de relaţia (6) se numeşte automorfism interior al grupului ternar $(A,\bigcirc)$ corespunzător sistemului de elemente a_1, a_2.

Observaţie. Deoarece aplicaţia $f_{a_1a_2}$ este bijectivă, există $f^{-1}_{a_1a_2}: A\to A;\ f^{-1}_{a_1a_2}(x)=(a_1, a_2, (x, \overline{a_2}, \overline{a_1})_\circ)_\circ$,şi conform proprietăţilor transversalei avem $f^{-1}_{a_1a_2}(x)=(\overline{\overline{a_1}}, \overline{\overline{a_2}}, (x, \overline{a_2}, \overline{a_1})_\circ)_\circ$ deci $f^{-1}_{a_1a_2}=f_{\overline{a_2}\,\overline{a_1}}$.

Aşadar, în cazul ternar, mulţimea automorfismelor interioare este:

Int A= $(f_{a_1,a_2}: A\to A;\ f_{a_1,a_2}(x)=(\overline{a_2}, \overline{a_1}, (x, a_1, a_2)_\circ)_\circ ; a_1a_2\in A)$

Teorema 2:_Mulţimea Int A a automorfismelor interioare ale grupului ternar $(A,\bigcirc)$, formează un subgrup normal al grupului tuturor automorfismelor lui $(A,\bigcirc)$._

Demonstraţie: Studiem compunerea a două elemente din Int A:

$$(f_{a_1a_2}\circ f_{b_1b_2})(x)=f_{a_1a_2}(f_{b_1,b_2}(x))=(\overline{a_2}, \overline{a_1}, (f_{b_1b_2}(x)a_1a_2)_\circ)_\circ$$

$$=(\overline{a_2}, \overline{a_1}((\overline{b_2}, \overline{b_1}, (x, b_1b_2)_\circ)_\circ , a_1, a_2)_\circ$$

$$=(\overline{a_2}, (\overline{a_1}, \overline{b_2}, \overline{b_1}), (x, (b_1b_2a_1)_\circ a_2)_\circ)_\circ)_\circ=(\overline{a_2}(\overline{b_1, b_2, a_1}), (x(b_1, b_2, a_1)_\circ a_2)_\circ)_\circ=$$

$$=f_{(b_1,b_2,a_1),a_2}(x)$$

Prin urmare

$(\forall) f_{a_1a_2}, f_{b_1b_2}\in$ IntA$\to f_{a_1,a_2}\circ f_{b_1,b_2}=f_{c_1,c_2}$ unde $c_1=(b_1, b_2, a_1)_\circ$ *si* $c_2=a_2$

Cum $f_{a_1,a_2}\in$ Int A$\to f^{-1}_{a_1,a_2}=f_{\overline{a_2},\overline{a_1}}\in$ Int A.

Am demonstrat, că(IntA,$\cdot$) este un subgrup al grupului automorfismelor **(AutA,$\cdot$)**.

Să demonstrăm că IntA este divizor normal al lui AutA, adică

$(\forall)$ g$\in$Aut A, g$\cdot$Int A=IntA$\cdot$g,

$$(g\circ f_{a_1,a_2})(x)=g(f_{a_1,a_2}(x))=g((\overline{a_2},\overline{a_1}(x,a_1,a_2)_\circ)_\circ)=$$

$$=(g(\overline{a_2})g(\overline{a_1})g((x,a_1,a_2)_\circ)_\circ=(g(\overline{a_2})g(\overline{a_1})(g(x)g(a_1)g(a_2))_\circ)_\circ=$$

$$=(\overline{g(a_2)},\overline{g(a_1)},(g(x),g(a_1),g(a_2))_\circ)_\circ=f_{g(a_1),g(a_2)}(g(x))=(f_{g(a_1)g(a_2)}\circ g)(x)$$

Exemplu: Considerăm grupul ternar $(\mathbb{Z},\circ)$, unde operația $\circ$ este definită astfel:

$$(a_1,a_2,a_3)_\circ=a_1-a_2+a_3$$

Deoarece $(a,a,\overline{a})_\circ=a$ avem $\overline{a}=a$ și

$$f_{a_1,a_2}(x)=(\overline{a_2},\overline{a_1}(x,a_1,a_2)_\circ)_\circ=(a_2,a_1(x,a_1,a_2)_\circ)_\circ=(a_2-a_1+(x,a_1,a_2)_\circ=$$

$$=a_2-a_1+(x-a_1+a_2)=2a_2-2a_1+x \text{ adică } f_{a_1a_2}(x)=2(a_2-a_1)+x \quad \forall x\in\mathbb{Z}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. PURDEA, I., Tratat de algebră vol.I.Ed.Academiei;1977
2. POP, M.S., Structuri algebrice ternare definite pe punctele unei parabole, Sem. Creat. Universitatea Baia Mare (1992-1993), vol.II, pag.25-40

INNER AUTOMORPHISMS OF TERNARY GROUPS

ABSTRACT. The paper extends the notion of inner automorphism of groups to the case of ternary groups. The set of all inner automorphisms of a ternary group $(A,\circ)$ is a normal subgroup of $Aut(A,\circ)$.

Universitatea Baia Mare
Str.Victoriei nr.76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA