Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.4(1994-1995), 73-80

ABORDAREA EXHAUSTIVĂ A UNOR PROBLEME DE GEOMETRIE

Stefan SABĂU

Această notă matematică pornește de la problema nr.21 pag.168 din manualul de " Geometrie și trigonometrie " clasa a IX -a, ediția 1994 și edițiile anterioare.

Enunțul problemei este:

" Într-un cerc se inscrie triunghiul isoscel ABC cu (AB)=(AC).Două drepte ce trec prin A intersectează latura (BC) in M și N și cercul în M′ și N′.Să se arate că patrulaterul MM′N′N este inscriptibil "
Aceeași problemă apare,in unele culegeri sau teste,dar cu formularea "...intersectează dreapta BC...".
Dacă rezolvarea problemei în formularea dată în manual necesită analiza unui singur caz (fig.1) consider că rezolvarea completă a problemei necesită analizarea mai multor cazuri și anume:

Temă prezentată la Ziua Liceului " Vasile Lucaciu ", 22 ianuarie 1995

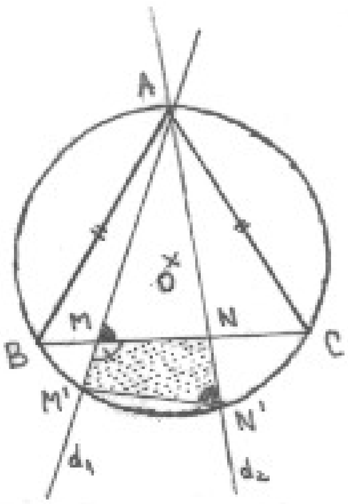

Fig.1

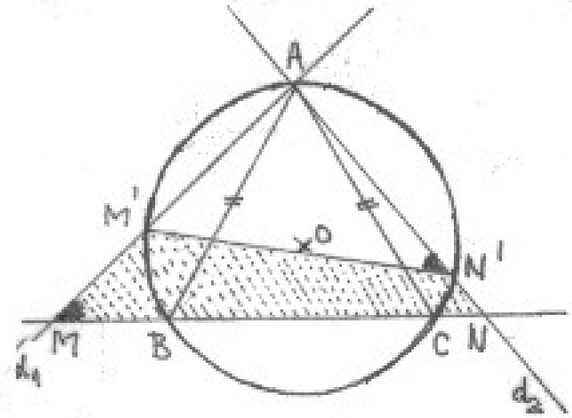

Fig.2

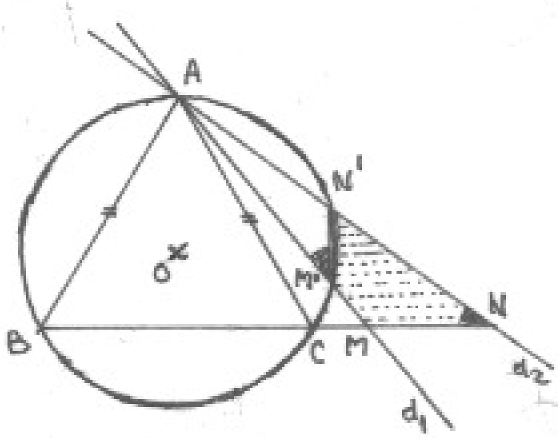

Fig.3.

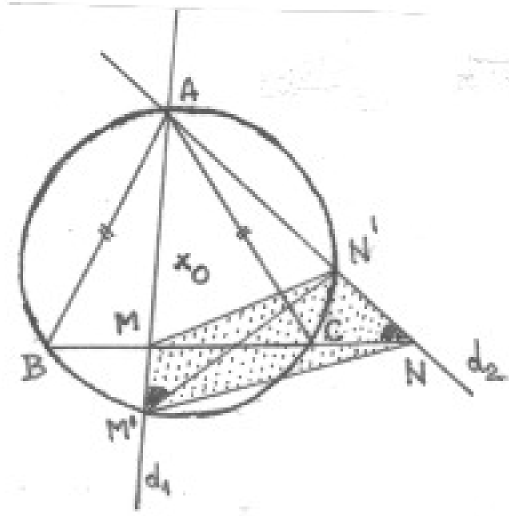

Fig.4.

-cele două drepte ce trec prin A taie dreapta BC de o parte şi de alta a segmentului BC (fig.2);

-cele două drepte taie dreapta BC de aceeaşi parte a segmentului BC (fig.3);

-o dreaptă taie segmentul BC, iar cealaltă prelungirea lui (fig.4).

Vom analiza pe rând cele patru situaţii să vedem dacă problema rămâne adevărată în toate, iar dacă nu, să vedem ce modificări trebuie făcute în enunţ pentru ca problema să rămână adevărată în toate situaţiile posibile.

1)Dacă dreptele intersectează [BC] fig.1.

Soluţia I.(cu unghiuri opuse suplementare)

$\sphericalangle$M'MC este unghi interior deci $m(\sphericalangle M'MC)=\frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{M'N'C})+m(\overset{\frown}{AB})]$ (1)

$\sphericalangle$M'N'A este unghi înscris $\rightarrow m(\sphericalangle M'N'A)=\frac{1}{2}m(\overset{\frown}{M'BA})$ (2)

Din (1)+(2)$\rightarrow m(\sphericalangle M'MC)+m(\sphericalangle M'N'A)=$

$$=\frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{M'N'C})+m(\overset{\frown}{AB})+m(\overset{\frown}{ABM'})]\underline{ip}$$

$$=\frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{M'N'C})+m(\overset{\frown}{AC})+m(\overset{\frown}{ABM'})]=\frac{1}{2}\cdot 360^\circ=180^\circ\Rightarrow MM'N'N$$ este patrulater inscriptibil.

Soluţia a II - a.(cu unghi exterior)

$\sphericalangle$AMC este unghi interior cercului $\rightarrow$

$$m(\sphericalangle AMC)=\frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{AC})+m(\overset{\frown}{BM'})] \quad (3)$$

Din (2)$\rightarrow m(\sphericalangle M'N'A)=\frac{1}{2}m(\overset{\frown}{M'BA})$

din $[AB]\equiv[AC] \Rightarrow \overset{\frown}{AB}\equiv\overset{\frown}{AC} \rightarrow \sphericalangle AMC\equiv\sphericalangle M'N'A \rightarrow MM'N'N$ este patrulater inscriptibil.

2)Dacă dreptele taie prelungirile laturii BC(fig.2) de o parte şi de alta.

$\sphericalangle$AMN este unghi exterior deci

$$m(\sphericalangle AMN)=\frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{AN'C})-m(\overset{\frown}{M'B})]\underset{AB=AC}{\underline{ip}}\frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{AB})-m(\overset{\frown}{M'B})]=\frac{1}{2}m(\overset{\frown}{AM'}) \ (*)$$

$\sphericalangle AN'M'$ este unghi înscris $\Rightarrow m(\sphericalangle AN'M')=\frac{1}{2}m(\overset{\frown}{AM'})$ (**)

Din (*) şi (**)$\rightarrow \sphericalangle AMN\equiv\sphericalangle AN'M'$ deci patrulaterul MM'N'N este inscriptibil.

3)Dacă dreptele taie prelungirea lui [BC] de aceeaşi parte (fig.3)

$\sphericalangle AM'N'$ este unghi închis $\rightarrow m(\sphericalangle AM'N') = \frac{1}{2}m(\widehat{AN'})$ (a)

$\sphericalangle ANB$ este unghi exterior$\rightarrow$

$$m(\sphericalangle ANB) = \frac{1}{2}[m(\widehat{AB}) - m(\widehat{N'M'C})] \underset{\widehat{AB}=\widehat{AC}}{\underline{ip}} = \frac{1}{2}[m(\widehat{AC}) - m(\widehat{N'M'C})] = \frac{1}{2}m(\widehat{AN'}) \quad (b)$$

Din (a) și (b)$\rightarrow \sphericalangle AM'N' = \sphericalangle MNN' \rightarrow$ patrulaterul MM'N'N este inscriptibil având un unghi exterior congruent cu unghiul interior opus.

4)Dacă o dreaptă taie latura [BC] și cealaltă prelungirea ei (fig.4) avem:

$\sphericalangle AM'N'$ unghi înscris deci $m(\sphericalangle AM'N') = \frac{1}{2}m(\widehat{AN'})$ (c)

Din $\sphericalangle$ANB unghi exterior

$$\rightarrow m(\sphericalangle ANB) = \frac{1}{2}[m(\widehat{AB}) - m(\widehat{N'C})] \underset{AB=AC}{\underline{ip}} \frac{1}{2}[m(\widehat{AC}) - m(\widehat{N'C})] = \frac{1}{2}m(\widehat{AN'}) \quad (d)$$

Din (c)și (d)$\rightarrow$ patrulaterul <u>MM'NN'</u> este inscriptibil având unghiuri formate de diagonale cu laturile opuse congruente.

Se observă că în acest caz patrulaterul MM'N'N nu mai este patrulater convex <u>deci</u> problema va fi adevărată în toate cazurile dacă în enunț am cere ca punctele M,M',N,N'să fie conciclice.

O altă problemă al cărei enunț <u>ne obligă</u> să analizăm mai multe situații este următoarea:

" În triunghiul ABC, unghiurile B și C sunt ascuțite.Pe latura [AB] construim triunghiul ABD cu [AD]≡[BD] iar pe latura [AC] triunghiul echilateral ACE.Dacă [DM și [EN sunt bisectoarele unghiurilor ABD respectiv AEC, iar {P}=DM∩EN, să se arate că

a)Patrulaterul AMPN este inscriptibil,

b)P∈(BC) dacă și numai dacă ΔABC este dreptunghic (m(∢A)=90º)"

Citind cu atenție enunțul problemei observăm că <u>nu se specifică</u> cum să fie construite triunghiurile ABD respectiv ACE fapt care ne sugerează necesitatea analizării mai multor situații care ar putea apare și dacă rămâne adevărată în fiecare caz, în caz contrar care ar trebui să fie modificarea adusă enunțului pentru a fi adevărată în toate cazurile.

Cazul I. Considerăm ambele triunghiuri construite spre exteriorul triunghiului ABC.

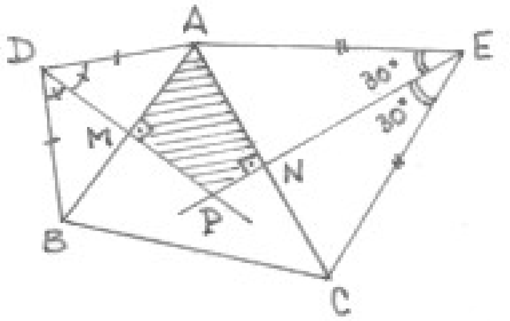

Fig.1.a

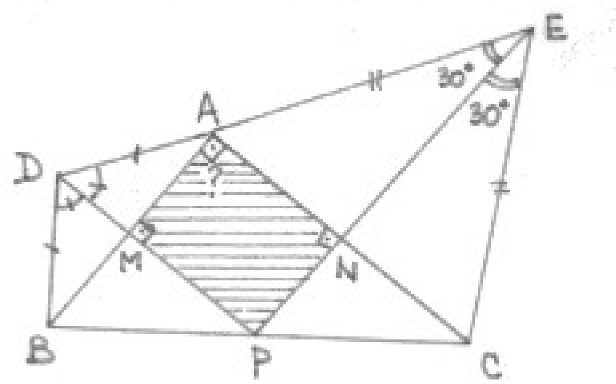

Fig.1.b.

a)Din $[AD] = [BD] \rightarrow \Delta ABD$-isoscel şi cum $[DM$ este bisectoare $\rightarrow DM$ este înălţime,mediană şi mediatoare deci $[AM]\equiv[MB]$ şi $m(\sphericalangle AMP)=90°$ (1).Analog obţinem din ΔACE echilateral $m(\sphericalangle ANP)=90°$ (2)

Din (1) şi (2)$\rightarrow m(\sphericalangle AMP)+m(ANP)=180°$ deci patrulaterul AMPN este inscriptibil (vezi fig.1.a)

b)"$\Rightarrow$" Demonstrăm că " dacă $P\in(BC)\rightarrow\Delta ABC$ este dreptunghic în A" (fig.1.b).

Din $P\in(BC)$ şi DM respectiv EN mediatoare conform relaţiilor (1) şi (2)$\rightarrow$P este centrul cercului circumscris triunghiului ABC$\rightarrow[BC]$ este diametrul acestui cerc deci $m(\sphericalangle BAC)=90°$ ca unghi înscris într-un semicerc.

"$\Leftarrow$" Demonstrăm implicaţia inversă: " dacă ΔABC are $m(\sphericalangle BAC)=90°\Rightarrow P\in(BC)$".

Din relaţia (1)$\rightarrow$DM mediatoare,deci $[AM]=[MB]$ şi $MP\perp AB\rightarrow MP||AC$, adică $[MP]$ este linie mijlocie a ΔABC(3).Analog din (2)$\Rightarrow[NP]$ linie mijlocie (4).Din (3) şi (4)$\rightarrow P\in(BC)$ fiind mijlocul lui $[BC]$ (un segment are un singur mijloc).

Cazul II. Construim ambele triunghiuri spre interiorul ΔABC.

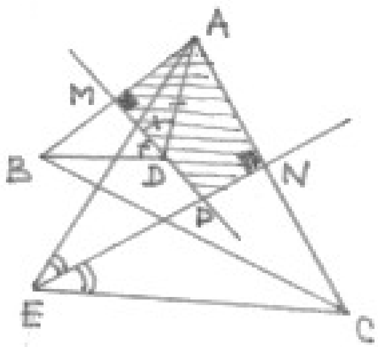

Fig.2.a

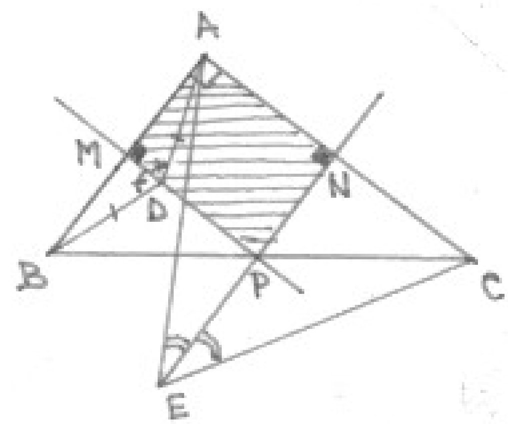

Fig.2.b

Demonstraţia se face la fel ca şi la cazul I.

Cazul III. Construim un triunghi spre interior şi celălalt spre exterior, (de exemplu ΔABD interior şi ΔACE spre exterior).

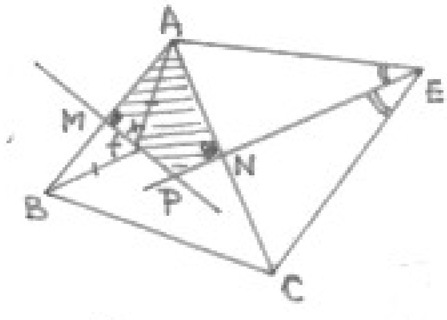

Fig.3.a

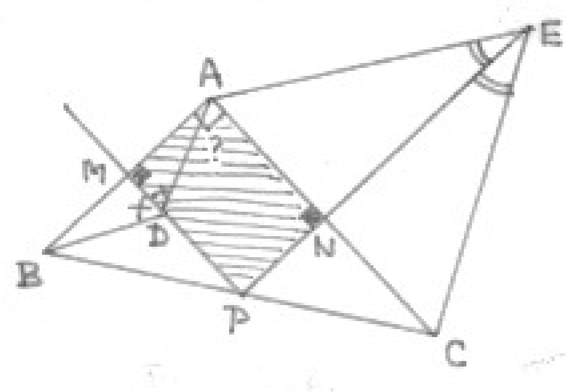

Fig.3.b

Se observă că şi în acest caz problema este adevărată fără nici o restricţie.Mai mult,problema rămâne adevărată şi în cazul în care ambele triunghiuri sunt isoscele sau ambele echilaterale şi indiferent de modul de construcţie.

Observaţii.1)Condiţia ca unghiurile B şi C să fie ascuţite este necesară pentru a avea loc cerinţa b) a problemei pentru că dacă $m(\sphericalangle B)>90^\circ$ sau $m(\sphericalangle C)>90^\circ \rightarrow m(\sphericalangle A)<90^\circ$.

2)Condiţia a) a problemei are loc şi pentru $m(\sphericalangle B)>90^\circ$ sau $m(\sphericalangle C)>90^\circ$ (vezi fig.4.a,b.).

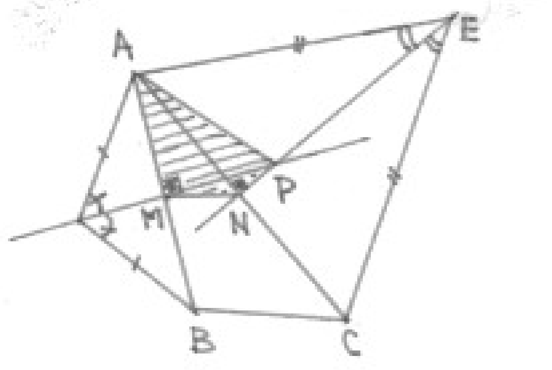

Fig.4.a. $m(B)>90^\circ$

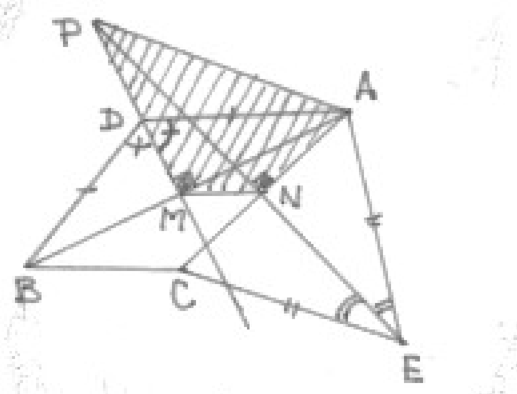

Fig.4.b. $m(\sphericalangle C)>90^\circ$

În aceste cazuri se observă că ordinea AMPN nu se mai poate da pentru patrulater şi atunci punem condiţia ca punctele A,M,P,N să fie conciclice şi din aceleaşi considerente de la cazul (I) avem $m(\sphericalangle AMP)=m(\sphericalangle ANP)=90^\circ$

(unghiuri formate de diagonale cu laturile opuse)

În aceste condiţii→AMNP inscriptibil fig.4.a, şi

ANMP inscriptibil fig.4.b.

Observăm astfel că un cuvânt omis, sau în plus sau schimbat în enunţul problemei poate complica sau simplifica rezolvarea problemei.

EXHAUSTIVE TREATMENT OF SOME PROBLEMS OF GEOMETRY

Abstract. In this note we try to give an exhaustive solution to a problem of geometry.

Liceul de Artă
4800 Baia Mare
ROMÂNIA