Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.4(1993-1994), 81-88

O TEOREMĂ DE MEDIE DE TIP CAUCHY ÎN DOMENIUL COMPLEX

BEDÖ BLANKA*

Introducere

Odată cu reprezentarea geometrică a numerelor complexe dată de matematicianul Karl Friedrich Gauss în 1831,a apărut conceptul de variabilă complexă $z=x+iy$ şi de funcţia de variabilă complexă. Atenţia multor matematicieni a fost îndreptată către construcţia în domeniul complex ale unor analoage ale unor teoreme binecunoscute din analiza reală,ca teoremele de medie ale lui Rolle, Lagrange, Cauchy.

Teorema lui Rolle afirmă că între oricare două rădăcini ale unei funcţii reale f derivabilă se află cel puţin un punct critic. Următoarele două exemple [1] arată că această afirmaţie nu are loc în cadru complex.

---

* *Lucrare susţinută la Sesiunea Ştiinţifică a Studenţilor, Universitatea din Baia Mare, aprilie 1995, sub indrumarea conf.dr. Lidia Kozma.*

Exemplu 1

Fie $f(z)=e^{iz}-1$. Să vedem dacă afirmaţia din teorema lui Rolle e adevărată.

Pentru $z=0$ şi $z=2\pi$ avem $f(z)=0$. Dar $f'(z)=i\cdot e^{iz}=0$ nu are rădăcini situate între 0 şi 2π.

Exemplu 2

Fie $f(z)=(z^2-1)(z-i\sqrt{3})$

Ecuaţia $f(z)=0$ are rădăcinile $z=\pm1$ *si* $z=i\sqrt{3}$ (fig.1)

Prin reprezentare obţinem un triunghi isoscel.

Dacă teorema lui Rolle ar fi valabilă, ar trebui să avem puncte critice pe fiecare latură a triunghiului.

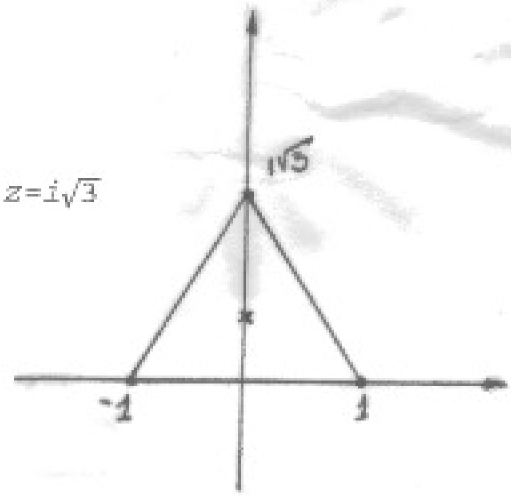

fig.1

Dar $f'(z)=3\left(z-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^2=0$ are o singură rădăcină situată în interiorul triunghiului,

$z=\frac{i\sqrt{3}}{3}$

Observaţie. Conceptul de existenţă a punctului critic între două rădăcini ale funcţiei (pe segmentul ce leagă cele două rădăcini) in general e înlocuit în planul complex de conceptul că punctul critic se află într-o regiune ce conţine rădăcinile funcţiei date (regiune ce poate fi triunghi, poligon sau disc circular).

Referitor la funcţiile complexe, sunt cunoscute următoarele teoreme:

Teorema 1 [2]. *Fie $D\subset\mathbb{C}$ simplu conex, $f\in\mathcal{H}(D)$, $a,b\in D$, $f(a)=f(b)=0$, $a\neq b$. Atunci $(\exists)z_1,z_2\in(a,b)$ astfel încât* $Re\ (f'(z_1))=0$

$Im\ (f'(z_2))=0$

Demonstrație Fie $a=a_1+ia_2, b=b_1+ib_2, f(z)=u(z)+iv(z)$.
Considerăm funcția reală $\phi:[0,1]\to\mathbb{R}$,
$\phi(t)=(b_1-a_1)\cdot u(a+t(b-a)+(b_2-a_2)\cdot v(a+t(b-a)),\ \forall\ t\in[0,1]$.
Deoarece $f(a)=f(b)=0\to u(a)=u(b)=v(a)=v(b)=0$.
Avem $\phi(0)=0$ și $\phi(L)=0$. Aplicând teorema lui Rolle din analiza reală:
$(\exists)t_1 \in (0,1)$ a.î. $\phi'(t_1)=0$. Fie $z_1=a+t_1(b-a)$, deci $z_1\in(a,b)$

Datorită condițiilor Cauchy -Riemann, rezultă:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_1)\left[(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2\right]=0$$

$$Re\{f'(z_1)\}=\frac{\partial u}{\partial x}(z_1)=0$$

Fie $g=-if$. Folosind cele de mai sus, avem: $(\exists)z_2 \in(a,b)$ astfel încât $Re(g'(z_2))=0$

Dar $$Re\{g'(z_2)\}=\frac{\partial v}{\partial x}(z_2)=-\frac{\partial u}{\partial y}(z_2)=Im\{f'(z_2)\}\to Im\{f'(z_2)\}=0.$$

Teorema 2 (o consecință a teoremei 1)[2]

Fie $D\subset\mathbb{C}$, simplu conex, $f\in\mathcal{H}(D)$, $a,b\in D$. Atunci $(\exists)$ $z_1,z_2\in(a,b)$ astfel încât:

$$Re\{f'(z_1)\}=Re\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right\}$$

$$Im\{f'(z_2)\}=Im\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right\}$$

Demonstrație. Considerăm funcția ajutătoare:

$g(z)=f(z)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(z-a), \forall z\in D$ care are proprietatea $g(a)=g(b)=0$

Aplicăm prima teoremă: $(\exists)z_1,z_2 \in(a,b)$ a.î. $Re\{g'(z_1)\}=0$ și $Im\{g'(z_2)\}=0$

Înlocuind $g'(z)=f'(z)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $\forall z\in D$ în aceste relaţii rezultă chiar egalităţile din Teorema 2.

Exemple.

1.Funcţia $f(z)=e^{z}-1$ satisface condiţiile teoremei 1

$f(z)=0 \rightarrow z=2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$

$$f'(z)=e^{z}=e^{x}(\cos y+i\sin y)=0 \rightarrow \begin{cases}\cos y=0 \rightarrow & y=\frac{2k+1}{2}\pi \\ \sin y=0 \rightarrow & y=k\pi\end{cases}$$

Între două rădăcini ale funcţiei f se află cel puţin o rădăcină a derivatei.

2. $f(z)=(z-a)(z-b),\ a\neq b$

$f(z)=0 \rightarrow z=a$ sau $z=b$

$f'(z)=2z-a-b$. Aplicând Teorema 1.:

$$x=Re\left\{\frac{a+b}{2}\right\}\quad y=Im\left\{\frac{a+b}{2}\right\}\quad (z_1=z_2)$$

Folosind demonstraţiile de mai sus, se poate da o teoremă analoagă teoremei lui Cauchy în domeniul complex.

Teorema 3. *Fie $D\subseteq\mathbb{C}$ simplu conex, $f,g\in\mathcal{H}(D)$, $a,b\in D$, $a\neq b$ şi $g'(z)\neq 0$, $\forall z\in D$.*
Atunci $(\exists)$ $z_1, z_2 \in (a,b)$ astfel încât

$$Re\{f'(z_1)\}=Re\left\{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(z_1)\right\}$$

$$Im\{f'(z_2)\}=Im\left\{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(z_2)\right\}$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia ajutătoare:

$h(z)=f(z)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot[g(z)-g(a)]$; ea are proprietatea

$h(a)=h(b)=0$

Deci putem aplica teorema 1:

$(\exists)\, z_1, z_2 \in (a,b)$ a.î. $Re\,\{h'(z_1)\}=0$ *si* $Im\,\{h'(z_2)\}=0$

Înlocuind $h'(z)=f'(z)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(z)$ obţinem relaţiile din enunţ.

Aplicaţii.

1.a) Fie funcţia $I(x)=\dfrac{z^3+3z-1}{2z-1}$. .Să o cercetăm, folosind teorema

lui Cauchy analoagă.

Notăm $f(z)=z^3+3z-1$ şi $g(z)=2z-1$.Avem $g'(z)=2\neq 0$; funcţiile fiind olomorfe,luând $a=3+3i$, $b=4+i$, sunt indeplinite condiţiile din enunţul teoremei.

$f'(z)=3(x^2-y^2+1)+6ixy$. Ca urmare:

$(\exists)\, z_1, z_2, \in (a,b)$, $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ a.î.

$$\begin{cases} 3(x_1^2-y_1^2+1)=Re\,\{\,b^2+ab+a^2+3\,\}=27 \\ 6x_2y_2=Im\,\{b^2+ab+a^2+3\,\}=41 \end{cases} \Leftrightarrow (\exists)\begin{cases} x_1\in(3,4) \\ y_2\in(1,3) \end{cases} \text{a.î.} \begin{cases} x_1^2-y_1^2=8 \\ x_2y_2=\dfrac{41}{6} \end{cases}$$

S-au obţinut două ecuaţii de gradul II.

b) $f(z)=z^3+3z-1$, $g(z)=z^2+2z$, $g'(z)=2z+2$, $g'(z)\neq 0 \Leftrightarrow z\neq -1$

Luând $a=3+3i$, $b=4+i$, vom obţine:

$$3(x_1^2-y_1^2+1)=\frac{27}{97}(18x+8y+18)$$

$$6x_2y_2=\frac{27}{97}(18v-8u-8)$$

c) $f(z)=z^3+3z-1$, $g(z)=z^3+2z-1$, $a=3+3i$, $b=4+i$. Vom avea:

$$3(x_1^2-y_1^2+1)=-\frac{2383}{1005}(3x_1^2-3y_1^2+2)-\frac{41}{1005}\cdot 6x_1y_1,$$

$$6x_2y_2=\frac{41}{1005}(3x_2^2-3y_2^2+2)-\frac{2383}{1005}\cdot 6x_2y_2$$

d) $f(z)=z^3+3z-1$, $g(z)=z^4+2z$. .În acest caz se obţin două ecuaţii de grad III.

Observaţie *Prin aplicarea teoremei se obţin două ecuaţii de grad cu unul mai puţin decât gradul funcţiei polinomiale de grad mai mare.*

2.Ce se întâmplă dacă în teorema 3 înlocuim g cu f şi f cu f' ?

Fie $D\subseteq\mathbb{C}$ simplu conex, $f,f'\in\mathcal{H}(D)$, $a,b\in D$, $a\neq b$ şi $f'(z)\neq 0$

Atunci $(\exists)$ $z_1,z_2\in(a,b)$ a.î.

$$Re\{f''(z_1)\}=Re\left\{\frac{f'(b)-f'(a)}{f(b)-f(a)}\cdot f'(z_1)\right\}$$

$$Im\{f''(z_2)\}=Im\left\{\frac{f'(b)-f'(a)}{f(b)-f(a)}\cdot f'(z_2)\right\}$$

În acest caz $l(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}=[\,Ln(f(z))]'$

Se poate pune problema dacă putem găsi o primitivă a funcţiei

$h(z)=\dfrac{f''(z)}{f'(z)}=[\,Ln(f'(z))]'$ ştiind că h(z) îndeplineşte condiţiile teoremei 3, sau o relaţie între această primitivă şi funcţia l(z).

3.Prima aplicaţie ne poate conduce şi la următoarea problemă inversă:

Dacă avem două ecuaţii independente de gradul II, care au câte o soluţie pe un segment [a,b](cel puţin o soluţie), folosindu-ne de teorema 2, alegând convenabil funcţia în a cărei expresie să intervină expresiile din ecuaţii, ne întrebăm dacă nu putem determina acest segment $[a,b]\subset\mathbb{R}^2$.

(1)$\varphi(x,y)=0$

(2)$\psi(x,y)=0$

$z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ soluţii ale (1), respectiv (2)

Luând în considerare condiţiile din teorema 3:

$\varphi(z)=Re\{f'(z)\}-Re\left\{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right\}=0$ unde alegem $f'(z)=\varphi(z)+i\psi(z)$

$f'(z) \in \mathcal{H}(D) \Rightarrow (\exists)$ primitivă $f(z) \in \mathcal{H}(D)$,pe care o determinăm prin integrare,abstracţie făcând de o constantă aditivă.

$$\psi(z) = Im\{f'(z)\} - Im\left\{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right\} = 0$$

BIBLIOGRAFIE

1.Moris, MARDEM, The search for a Rolle's theorem in the complex domain, 1985, A.M.M.

2.J.,CL.,EVARDS & F.,JAFARI, Amer.Math.Monthly

3.HAMBURG, P.,MOCANU,P.,NEGOESCU, Analiză Matematică (Funcţii complexe), Bucureşti, E.D.P.,1982.

AN ANALOGOUS OF THE CAUCHY'S MEAN VALUE THEOREM

FOR COMPLEX DOMAINS

SUMMARY. The paper presents some theorems for complex domains which are analogous to the mean value theorems in the real case.

Some examples of functions on which these theorems can be applied and some proposals for further applications are also presented.

Universitatea din Baia Mare
Str.Victoriei nr.76,4800 Baia Mare
ROMÂNIA