Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.4(1994-1995), 89-94

ASUPRA UNEI CLASE DE RECURENŢE NELINIARE

Vasile BERINDE

Numeroase probleme din manualele de liceu, din culegerile de probleme şi din revistele de matematică - şi amintim aici doar cele referitoare la: calculul puterii a n - a a unei matrice, calculul determinanţilor de ordinul n şi calculul integral - revin la rezolvarea unei recurenţe neliniare de ordinul $q \geq 1$, adică la determinarea unui şir $(x_n)_{n\geq p}$, care satisface relaţia

$$x_{n+q}=a_n x_n+b_n, \quad \text{pentru} \quad n\geq p, \tag{1}$$

unde $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}^*$, sunt numere naturale date iar $(a_n)_{n\geq p}$ şi $(b_n)_{n\geq p}$ sunt şiruri date.

Vom considera în continuare cazul netrivial, adică $a_n\neq 0$, pentru orice $n\geq p$. De obicei avem $q \in \{1,2\}$.
Bunăoară, exemplul 6, pag.17, din [5] cere calculul integralei nedefinite

$$I_n=\int \sin^{-n}x \, dx, \quad n\in\mathbb{N},$$

însă rezolvarea expusă acolo se mărgineşte doar la găsirea relaţiei de recurenţă pe care o verifică (I_n),

$$(n-1)\, I_n=(n-2)\, I_{n-2}-\cos x\cdot \sin^{1-n}x, \; n\in\mathbb{N}, \; n\geq 2, \tag{2}$$

fără să determine efectiv expresia lui I_n, aşa cum cerea enunţul.

De altfel, aceeaşi situaţie poate fi intâlnită în [8] unde exerciţiilor 133-153 li se dă aceeaşi rezolvare incompletă, datorită travaliului mare necesar pentru a duce calculele până la capăt.

Pentru q=1 nu este dificil de rezolvat problema; rezultate pentru acest caz pot fi găsite în [1], în cazul a_n= constant, şi în [7], în cazul $a_n \in (-1,1)$.

Procedând " din aproape în aproape " putem obţine în această situaţie termenul general al şirului (x_n) care verifică (1),

$$x_{n+1}=a_n \cdot a_{n-1} \ldots a_p x_p+(b_n+a_n b_{n-1}+a_n a_{n-1} \cdot b_{n-2}+\ldots+a_n a_{n-1} \ldots a_p \cdot b_p),\ n \geq p, \quad (3)$$

dar intenţia acestei note nu este aceea de a oferi elevilor o formulă pe care să o aplice într-un context dat, ci de a da o metodă, uşor de asimilat, prin care, rezolvarea fiecărei probleme să însemne redescoperirea formulei (3).

Vom folosi în continuare, următorul rezultat ajutător.

PROPOZIŢIA 1.

Dacă (x_n) satisface recurenţa

$$x_{n+1}=x_n+b_n,\quad n \geq p, \quad (4)$$

atunci

$$x_n=x_p+(b_p+b_{p+1}+\ldots+b_{n-1}) \quad (5)$$

Demonstraţie. Luăm în relaţia de recurenţă n:= p, p+1,...,n-1 şi obţinem

$$\begin{aligned} x_{p+1} &= x_p + b_p \\ x_{p+2} &= x_{p+1} + b_{p+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= x_{n-2} + b_{n-2} \\ x_n &= x_{n-1} + b_{n-1}, \end{aligned}$$

relaţii care prin adunare termen cu termen şi efectuarea reduce--rilor ne dau tocmai (4).

Observaţie. Metoda expusă mai sus este familiară majorităţii elevilor şi ea poate fi adoptată, prin multiplicarea succesivă cu un factor adecvat, şi în cazul $a_n \neq 1$, numai că în acest din urmă caz, apare un alt obstacol, acela al determinării factorului de multiplicare, după cum se poate vedea consultând lucrarea [6], unde această metodă este larg utilizată la rezolvarea exerciţiilor

198 - 234. Întrucât lucrarea [6] este destul de greu de găsit, pe de o parte, iar pe de altă parte, nici manualele în vigoare şi nici culegerile de probleme apărute în ultima vreme nu tratează această tehnică, o vom expune, printr-un exemplu, în partea de aplicaţii a notei de faţă, pentru a oferi astfel cititorului posibilitatea să o compare cu metoda noastră.

PROPOZIŢIA 2.

Dacă $(a_n)_{n\geq p}$ este un şir de numere reale nenule, atunci există un şir $(C_n)_{n\geq p}$, cu $C_p=1$, astfel încât să avem

$$\frac{C_n}{C_{n+1}}=a_n, \text{ pentru orice } n\geq p. \tag{6}$$

Demonstraţie.

Din relaţia (6) deducem uşor $C_n\neq 0$ şi

$$\frac{C_p}{C_{p+1}}\cdot\frac{C_{p+1}}{C_{p+2}}\cdots\frac{C_{n-2}}{C_{n-1}}\cdot\frac{C_{n-1}}{C_n}=a_p a_{p-1}\cdots a_{n-1},$$

de unde rezultă apoi, ţinând seama că $C_p=1$,

$$C_n=(a_p a_{p+1}\cdots a_{n-1})^{-1},\ n\geq p+1. \tag{7}$$

Trecem acum la rezolvarea recurenţei (1), pentru început în cazul q=1. Folosind propoziţia 2, relaţia (1) poate fi scrisă acum

$$C_{n-1}x_{n+1}=c_n x_n+b_n c_{n+1},\ n\geq p$$

care este de fapt o recurenţă de forma (4), deci, pe baza propoziţiei 1, $C_n\cdot x_n$ se determină uşor. Avem din (5),

$$x_n=\frac{1}{C_n}(C_p x_p+b_p C_{p-1}+b_{p+1}C_{p+2}+\ldots+b_{n-1}C_n),$$

care, ţinând seama de (7), ne furnizează tocmai formula (3).

Observaţie.

Pentru q=2, relaţia (6) va fi înlocuită cu

$$\frac{C_n}{C_{n+2}}=a_n$$

şi vom pune $C_p=\ldots=C_{p+q-1}=1$.

APLICAŢII

1° Să se calculeze $I_n=\int x^n e^x dx,\ x\in\mathbb{N}.$

Soluţie. Integrând prin părţi, obţinem relaţia de recurenţă

$$I_{n+1}=-(n+1)I_n+x^{n+1}e^x,\quad n\geq 1. \tag{8}$$

Aici $a_n=-n-1$, $b_n=x^{n+1}e^x$, $p=0$ şi $q=1$

Căutăm şirul $(C_n)_{n\geq 0}$, cu $C_0=1$, pentru care

$$\frac{C_n}{C_{n+1}}=-n-1,$$

şi obţinem $$C_n=\frac{(-1)^n}{n!},\quad n\geq 1,$$

astfel că relaţia (8) ia forma

$$\frac{(-1)^{n+1}I_{n+1}}{(n+1)!}=\frac{(-1)^n I_n}{n!}+\frac{(-1)^{n+1}x^n e^x}{(n+1)!},$$

din care obţinem, direct prin însumare sau folosind propoziţia 1,

$$I_n=e^x\left[(-1)^n n!+x^n+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k n\ldots(n-k+1)x^{n-k}\right]+c,\ n\geq 1. \tag{9}$$

Observaţie.

Dacă scriem relaţia (8) pentru n valori consecutive ale lui n, adică

$$\begin{aligned}
I_n &= -n\, I_{n-1}+x^n e^x\\
I_{n-1} &= -(n-1)\, I_{n-2}+x^{n-1} e^x\\
I_{n-2} &= -(n-2)\, I_{n-3}+x^{n-2} e^x\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
I_2 &= -2\cdot I_1+x^2 e^x\\
I_1 &= -1\cdot I_0+x\, e^x,
\end{aligned}$$

şi căutăm factorii de multiplicare adecvaţi, constatăm că vom înmulţi termen cu termen a doua relaţie cu $-n$, a treia cu $n(n-1)$, ş.a.m.d., a$(n-1)$-a relaţie cu $(-1)^{n-2}\, n(n-1)\ldots 4\cdot 3$(în aflarea acestei expresii constă dificultatea acestei metode !), şi, în sfârşit, a n-a relaţie cu $(-1)^{n-1}\cdot n(n-1)\ldots 3\cdot 2$.

Relaţiile astfel obţinute, prin adunare, ne permit reducerea termenilor I_{n-1}, $I_{n-2}, \ldots, I_1$ şi obţinem astfel tocmai (9).
Părerea noastră este că determinarea şirului (C_n) este în general mai simplă decât determinarea factorului de multiplicare.

2° Determinaţi termenul general al şirului $(I_n)_{n\geq 0}$ dat prin relaţia (2).

Soluţie.

În acest caz avem q=2 şi va fi nevoie să aflăm atât termenii de rang impar cât şi cei de rang par.
Scriem relaţia (2) sub forma

$$I_{n+2}=\frac{n}{n+1}\ I_n-\frac{\cos x\,\sin^{-n-1}x}{n+1},\quad n\geq 0, \tag{10}$$

şi căutăm mai întâi un şir $(C_n)_{n\geq 1}$, cu $C_1=1$,
astfel ca

$$\frac{C_n}{C_{n+2}}=\frac{n}{n+1}, \tag{11}$$

şi obţinem, pentru n impar,

$$C_n=\frac{2\cdot 4\ldots(n-3)(n-1)}{1\cdot 3\ldots(n-4)(n-2)},$$

când relaţia (10) se scrie

$$C_{n+2}I_{n+2}=C_nI_n+b_nC_{n+2},$$

cu $\quad b_n=\dfrac{\cos x\,\sin^{-n-1}x}{n+1},$

din care obţinem apoi $(I_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$, dat prin

$$I_{2k+1}=\frac{1}{C_{2k+1}}\cdot\left(C_1I_1+\sum_{i=1}^{2k-1}b_iC_{i+2}\right),$$

adică

$$I_{2k+1}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2k+1)}\cdot\ln\left|\ tg\frac{x}{2}\ \right|-\cos x[\frac{1}{2k}\sin^{-2k}x+$$

$$+\frac{2k-1}{2k\cdot(2k-2)}\cdot\sin^{2k+2}x+\ldots+\frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 3}{2k(2k-2)\ldots 4\cdot 2}\sin^{-2}x]+c$$

Pentru a afla termenii de rang par, vom căuta şirul $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $c_0=1$, astfel încât să aibă loc (11) şi apoi procedăm analog ca şi în cazul precedent.

Lăsăm pe seama cititorului această sarcină și îi sugerăm totodată să abordeze probleme din [5],[6] și [8] prin oricare din modelele expuse aici.

BIBLIOGRAFIE

1.ACU,D. - Recurența liniară de ordinul I, Revista matematică a elevilor din Timișoara, nr.2/1983, pag.

2.ANDREESCU, T.,ș.a.-Probleme de matematică date la concursurile și examenele din 1983,Timișoara,1984

3.BĂTINEȚU,D.M.-Probleme de matematică pentru treapta a doua de liceu. Șiruri, Editura Albatros, București 1979

4.BERINDE,V.,-Dualitatea în studiul recurențelor omografice, Lucrările Seminarul de creativitate matematică, Univ.din Baia Mare, vol.1 (1991-1992) pag.1-16

5.BOBOC,N.,COLOJOARĂ,I.,-Elemente de analiză matematică, Manualul pentru clasa a XII-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1988

6.FLONDOR,D.,DONCIU,N.,-Algebră și analiză matematică. Culegere de probleme, vol.II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965

7.MEGAN,M.,PREDA,P.,- Șiruri reale recurente, Caiete metodico - științifice, Universitatea Timișoara, nr.20,1984

8.NICOLESCU,C.P.,- Analiză matematică. Aplicații, Editura Albatros, București, 1987

ON A CLASS OF NONLINEAR RECURRENCES

ABSTRACT. The paper emphasizes an useful method for solving a class of nonlinear recurrent sequences of the form $x_{n+q}=a_n x_n+b_n$ and gives some applications to illustrate its utility ($q\geq 1$).

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr. 76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA