Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.4(1994-1995), 95-98

ASUPRA UNOR PROBLEME DE CONCURS

Dan BĂRBOSU

În această notă se fac unele observații asupra a două probleme propuse de autorul notei la concursul interjudețean de matematică " Grigore Moisil" ediția a IX-a, (1994), desfăşurat la colegiul " Gheorghe Şincai" din Baia Mare.

Printre problemele propuse la clasa a XI-a s-a aflat şi
P1." Să se arate că orice şir de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care satisface condițiile: $x_n>1,\ x_{n+1}\le\sqrt{x_n x_{n-1}}\ (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$ este convergent şi să se calculeze limita lui".

Prin introducerea şirului de termen general $z_n=\ln x_n$ problema **P1** se reduce la problema 365, pag.48 din [4]:
P'1. " Să se arate că orice şir de numere reale $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ care satisface condițiile: $z_n>0,\ z_{n+1}\le\dfrac{z_n+z_{n-1}}{2}\ (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$ este convergent şi să se calculeze limita lui".
Privitor la **P'1** în [3] am stabilit:

Propoziția 1. *Dacă sunt îndeplinite condițiile:*

1) $\alpha\ge0,\ \beta\ge0,\ \alpha+\beta<1$

2) $z_n>0,\ (\forall)\, n\in\mathbb{N}$

3) $z_{n+1}\le\alpha z_n+\beta z_{n-1},\ (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*$

este convergent.
În aceeaşi lucrare [3] am arătat că în condițiile propoziției 1 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=\dfrac{l}{2-\alpha}$ unde $l=\lim\limits_{n\to\infty}(z_n+(1-\alpha)z_{n-1})$. Particularizând $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$,

obținem pentru șirul $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din **P'1** $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \frac{2l}{3}$ unde $l=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\frac{1}{2}x_{n-1})$.

Privitor la **P1** în [3] am stabilit:

Propoziția 2. " *Dacă sunt îndeplinite condițiile:*

1') $\alpha\geq 0,\ \beta\geq 0,\ \alpha+\beta\leq 1$

2') $x_n>1,\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}$

3') $x_{n+1}\leq x_n^{\alpha}x_{n-1}^{\beta},\ (\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$

atunci șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este convergent.*"

Am arătat că în condițiile propoziției 2 avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e^{\frac{l}{2-\alpha}}$ unde $l=\lim\limits_{n\to\infty}(\ln x_n+(1-\alpha)\ln x_{n-1})$. Particularizând $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$ obținem că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din P1 este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e^{\frac{2l}{3}}$, unde $l=\lim\limits_{n\to\infty}(\ln x_n+\frac{1}{2}\ln x_{n-1})$.

Printre problemele propuse la clasa a XII-a s-a aflat și:

P2. Fie $n\in\mathbb{N}^*,\ a_i,b_i\in\mathbb{R}\ (i=\overline{1,n})$. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n}|x-a_i|\sin\frac{1}{x-b_i}, & x\notin\{b_1,\ldots,b_n\} \\ 0 & ,x\in\{b_1,\ldots,b_n\} \end{cases}$$

are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$.

Notăm prin $f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcțiile definite respectiv prin:

$$f_i(x) = \begin{cases} |x-a_i|\sin\frac{1}{x-b_i}, & x\neq b_i \\ 0 & ,x=b_i \end{cases} \qquad (i\in\{1,2,\ldots,n\})$$

Atunci $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$. Dacă $a_i=b_i$ $(\forall)\, i\in\{1,2,\dots,n\}$ atunci f_i este continuă pe $\mathbb{R}$, căci $\lim_{x\to a_i}|x-a_i|\sin\frac{1}{x-a_i}=0$. Prin urmare f este continuă pe $\mathbb{R}$, ca sumă de funcţii continue.

În cazul in care $(\exists)\, i\in\{1,2,\dots,n\}$ astfel încât $a_i\neq b_i$, se va arăta că funcţia f_i este primitivabilă pe $\mathbb{R}$. Rezultă atunci că f este primitivabilă pe $\mathbb{R}$ ca sumă de funcţii primitivabile pe $\mathbb{R}$, deci f are proprietatea lui Darboux pe $\mathbb{R}$. Problema P2 se reduce la aplicaţia 2.4 din [1], exprimată sub forma:

P′2. " Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq b$. Arătaţi că funcţia $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} |x-a|\sin\dfrac{1}{x-b}, & x\neq b \\ 0, & x=b \end{cases}$$

este primitivabilă pe $\mathbb{R}$".

Pentru a=b=0, problema P′2 se reduce la o variantă a unei binecunoscute probleme din [5], exprimată în:

P"2. " Arătaţi că funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} |x|\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

este primitivabilă pe $\mathbb{R}$".

Privitor la P′2, am stabilit în [1], teorema 2.1 exprimată sub forma:

Propoziţia 3. " *Fie $I\subset\mathbb{R}$ interval, $x_0\in I$, $f,g:I \to \mathbb{R}$. Dacă:*

i) f este continuă pe I

ii) f este derivabilă cu derivata continuă pe $I\setminus\{x_0\}$

iii) f are derivate laterale finite în x_0

iv) g este primitivabilă pe I

atunci funcţia $h: I \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)g(x)$ $(\forall)x\in I$ este primitivabilă pe I".

Observăm că notând în P'2 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=|x-a|$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$g(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x-b}, & x\neq b\\ 0, & x=b\end{cases}$$ avem $h(x)=f(x)\cdot g(x)$, $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$. Se verifică ușor că funcțiile f și g anterior definite satisfac condițiile propoziției 3 și ca urmare h este primitivabilă pe $\mathbb{R}$.

Revenind la problema P2, din cele prezentate mai sus rezultă că dacă $a_i\neq b_i$, atunci funcțiile f_i sunt primitivabile pe $\mathbb{R}$ și ca atare f este primitivabilă pe $\mathbb{R}$.

BIBLIOGRAFIE

1. BĂRBOSU, D., Operații cu funcții primitivabile, Lucrările Sem. de Creativitate Matematică, Univ. din Baia Mare, vol.II(1992-1993), pag.41-48
2. BĂRBOSU, D., ZELINA, I., Asupra unor operații cu funcții primitivabile (va apare în G.M.B)
3. BĂRBOSU, D., BALOG, L., Asupra unui șir recurent (va apare în R.M. a elevilor din Transilvania)
4. BĂTINEȚU-GIURGIU, D.M., ș.a., Analiză matematică. Exerciții și probleme, Ed.Militară, București, 1992
5. BOBOC, N., COLOJOARĂ, I., Analiză matematică, manual pentru clasa a XII-a, Ed.did. și ped. București, 1992.

ON SOME COMPETITION PROBLEMS

Abstract. Two problems proposed by the author at "Grigore Moisil" competition (1994) are presented.

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr. 76, 4800 Baia Mare