Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.4(1994 -1995),99-104

DESPRE ARGUMENTUL UNUI NUMĂR COMPLEX

Iulian COROIAN

1. Introducere

Ne propunem să prezentăm o definiţie a argumentului unui număr complex bazată pe definirea analitică a funcţiilor sin şi cos. Ea presupune cunoscute elemente de analiză matematică de liceu şi astfel definiţia se adresează elevilor din ultimul an de liceu, studenţilor şi profesorilor de matematică.

2. Construirea funcţiei generatoare e.

Să considerăm funcţia $u:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin

$$u(x) = 2\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}, \quad x\in\mathbb{R} \tag{2.1}$$

şi să observăm că $u'(x)>0$, deci u este strict crescătoare,şi deci injectivă. Mai avem

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = \pi, \quad \lim_{x\to-\infty} u(,x) = -\pi \ ,$$

astfel că $u:\mathbb{R} \to]-\pi,\pi[$ este o bijecţie.

Deoarece $u'(x)\neq 0$, inversa ei $v = u^{-1}:]-\pi,\pi[\to\mathbb{R}$ este derivabilă pe $]-\pi,\pi[$ şi dacă $x=v(\theta),\theta\in]-\pi,\pi[$

$$v'(\theta) = (u^{-1})'(\theta) = \frac{1}{u'(x)} = \frac{1}{2}(1+x^2)\,. \tag{2.2}$$

Definim acum funcţia complexă

$$e:]-\pi,\pi[\to\mathbb{C}, \quad e(\theta) = \frac{1+iv(\theta)}{1-iv(\theta)}, \tag{2.3}$$

unde $\theta\in]-\pi,\pi[$, $i^2=-1$. Cum $v(0)=0$, avem

$$e(0)=1 \quad \text{şi} \quad |e(\theta)|=1, \quad (\forall)\theta\in]-\pi,\pi[\tag{2.4}$$

Să prelungim funcţia e prin continuitate pe $[-\pi,\pi]$, punând

$$e(\pi)=\lim_{\theta\to\pi} e(\theta)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+ix}{1-ix}=-1,$$

$$e(-\pi)=\lim_{\theta\to-\pi} e(\theta)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+ix}{1-ix}=-1,$$

iar apoi prin periodicitate pe $\mathbb{R}$, punând

$$e(\theta+2\pi)=e(\theta)$$

Pe $]-\pi,\pi[$, $e(\theta)$ este derivabilă, căci $v(\theta)$ este derivabilă şi un calcul simplu arată că

$$e'(\theta)=i\,e(\theta) \tag{2.5}$$

Relaţia (2.5)este valabilă pentru orice $\theta\in\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\pi:k\in\mathbb{Z}\}$.

Pentru a studia derivabilitatea în punctele π şi $-\pi$ şi la fel în $(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, procedăm astfel:

Punem $e(\theta)=e_1(\theta)+ie_2(\theta)$, unde $e_1(\theta)=\mathrm{Re}(e(\theta))$ şi $e_2(\theta)=\mathrm{Im}(e(\theta))$ şi aplicăm formula creşterilor finite pe intervalele

$[\pi-\epsilon,\pi]$, $[\pi,\pi+\epsilon]$, $[-\pi-\epsilon,-\pi]$, $[-\pi,-\pi+\epsilon]$, cu $0<\epsilon<\pi$.

Pentru intervalul $[\pi,\pi+\epsilon]$ avem

$$\frac{e(\pi+\epsilon)-e(\pi)}{\epsilon}=\frac{e_1(\pi+\epsilon)-e_1(\pi)}{\epsilon}+i\frac{e_2(\pi+\epsilon)-e_2(\pi)}{\epsilon}=$$

$$=e_1'(\theta_1)+ie_2'(\theta_2), \quad \theta_1,\theta_2\in]\pi,\pi+\epsilon[\tag{2.6}$$

Datorită continuităţii lui $e'(\theta)$ în $]\pi,\pi+\epsilon[$ deci şi a lui $e_2'(\theta)$

avem

$$e_2'(\theta_2)=e_2'(\theta_1)+A(\theta_2), \tag{2.7}$$

unde $A:]+\pi,\pi+\epsilon[\to\mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{\theta_2\to\theta_1} A(\theta_2)=0$

Astfel relaţia (2.6) devine

$$\frac{e(\pi+\epsilon)-e(\pi)}{\epsilon}=e_1'(\theta_1)+ie_2'(\theta_1)+iA(\theta_2)=e'(\theta_1)+iA(\theta_2). \tag{2.8}$$

De aici pentru $\epsilon\to0$ se obţine $\theta_2,\theta_1\to\pi$ şi atunci cu (2.5)

$$e'(\pi)=\lim_{\epsilon\to0}\frac{e(\pi+\epsilon)-e(\pi)}{\epsilon}=\lim_{\theta_1\to\pi}1\,e'(\theta_1)=\lim_{\theta_1\to\pi} i\,e(\theta_1)=$$

$$=\lim_{\theta_1\to\pi} i\frac{1+iv(\theta_1)}{1-iv(\theta_1)}=\lim_{y\to+\infty} i\cdot\frac{1+iy}{1-iy}=-i$$

Aşadar

$$e'(\pi)=-i\ , \tag{2.9}$$

şi analog se obţine $e'(-\pi)=-i$ şi $e'((2k+1)\pi)=-i$, $k\in\mathbb{Z}$, astfel că relaţia (2.5) este valabilă pentru orice $\theta\in\mathbb{R}$.

3.Proprietăţi ale funcţiei generatoare.

Putem acum să punem în evidenţă câteva proprietăţi ale funcţiei generatoare e.

Propoziţia 3.1. Funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $f(\theta)=ae(\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$ şi $a\in\mathbb{C}$ este soluţie a ecuaţiei diferenţiale

$$f'=if, \tag{3.1}$$

şi reciproc,dacă funcţia f satisface (3.1), atunci $f(\theta)=f(0)e(\theta)$; şi dacă $f(0)=1$,atunci $f(\theta)=e(\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$.

Demonstraţie. Verificarea relaţiei (3.1) este imediată cu ajutorul relaţiei (2.5).

Pentru a demonstra reciproca, fie $f'(\theta)=i\cdot f(\theta),\theta\in\mathbb{R}$ şi atunci

$$\left(\frac{f(\theta)}{e(\theta)}\right)'=\frac{f'(\theta)e(\theta)-f(\theta)e'(\theta)}{e^2(\theta)}=\frac{if(\theta)e(\theta)-if(\theta)e(\theta)}{e^2}=0,$$

astfel că

$$\frac{f(\theta)}{e(\theta)}=const.=\frac{f(0)}{e(0)}=f(0)$$

adică $f(\theta)=f(0)\cdot e(\theta)$.

Propoziţia 3.2. Funcţia e satisface ecuaţia funcţională

$$e(\theta_1+\theta_2)=e(\theta_1)\cdot e(\theta_2),\quad \theta_1,\theta_2\in\mathbb{R} \tag{3.2}$$

Demonstraţie. Fie $\theta_1\in\mathbb{R}$ fixat şi funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$,

$g(\theta)=e(\theta_1+\theta)$, $\theta\in\mathbb{R}$,

Avem $g(0)=e(\theta_1)$ şi cu relaţia (2.5)

$$g'(\theta)=e'(\theta_1+\theta)=ie(\theta_1+\theta)=ig(\theta)\ .$$

Conform propoziţiei 3.1. se deduce că $g(\theta)=g(0)\cdot e(\theta)=e(\theta_1)\cdot e(\theta)$
Aşadar pentru $\theta=\theta_2$ obţinem relaţia cerută.

Definiţia 3.1. Partea reală a funcţiei complexe $e(\theta)$ se notează cu $\cos\theta$, iar partea imaginară cu $\sin\theta$.
Aşadar $\cos, \sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

$$\cos\theta=\mathbb{R}e(e(\theta)),\ \sin\theta=Im(e(\theta)),\ \theta\in\mathbb{R} \tag{3.3}$$

şi $e(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$.

Observaţia 3.1. Din (2.5), prin egalarea părţilor reale şi a părţilor imaginare se obţin relaţiile:

$$(\cos\theta)'=\sin\theta,\ (\sin\theta)'=\cos\theta,\ \theta\in\mathbb{R} \tag{3.4}$$

iar din $|e(\theta)|=1$ se deduce relaţia fundamentală $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.
Deasemenea utilizând propoziţia 3.2 se pot deduce toate formulele cunoscute pentru funcţiile cos şi sin şi periodicitatea lor.

Propoziţia 3.3. Aplicaţia $\theta\to e(\theta)=\cos\theta+i\sin\theta$ este un omomorfism al grupului aditiv $\mathbb{R}$ pe grupul multiplicativ $G=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$, nucleul acestui omomorfism fiind mulţimea $\{2k\pi;k\in Z\}$.

Demonstraţie. Este clar că aplicaţia $e:\mathbb{R}\to G$ este bijectivă şi satisface relaţia (3.2). Ecuaţia $e(\theta)=1$ este satisfăcută de $\theta=2k\pi$, $k\in Z$ şi să arătăm că nu mai are alte soluţii. Pentru $\theta\in]0,2\pi[$ avem $e(\theta)\neq1$, căci dacă $\theta\in]0,\frac{\pi}{2}]$ avem $\sin\theta>0$, dacă

$\theta\in]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[$, $\cos\theta<0$, iar dacă $\theta\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$, $\sin\theta<0$.

Din cauza periodicităţii vom avea $e(\theta)\neq1$, pentru $\theta\neq2k\pi, k\in\mathbf{Z}$
Aşadar nucleul omomorfismului e este $\{2k\pi;k\in Z\}$.

Propoziţia 3.4. Avem $e(\theta_1)=e(\theta_2)$ dacă şi numai dacă $\theta_1-\theta_2=2k\pi;k\in Z$.
Demonstraţia se face prin reducere la absurd şi utilizând propoziţia 3.2.

4. Noţiunea de argument.

Definiţia 4.1. Dacă $z=a+ib\in G$ adică $|z|=1$, atunci soluţia ecuaţiei $e(\theta)=z$, din $]-\pi,\pi]$ se numeşte *argumentul* numărului complex z şi se notează argz.

Observaţia 4.1. Existenţa argumentului este justificată cu propoziţia 3.3. căci $|e(\theta)|=1$ şi e este un omomorfism.
Deasemenea unicitatea lui argz este asigurată.

Dacă $a\geq 0$ şi $b\in[-1,1]$ atunci $argz=\theta=2\int_0^b \frac{dt}{1+t^2}$ şi atunci $argz\in]0,\pi]$.
Dacă $a<0$ şi $b \in [-1,1]$ atunci ecuaţia $e(\theta) = z$ are soluţia $\theta+\pi$ şi $argz=\theta+\pi$
Dacă $z\in\mathbb{C}$ nu neapărat cu $|z|=1$ atunci avem

Definiţia 4.2. Pentru orice număr $z\in\mathbb{C}$, $z\neq 0$, orice soluţie $\theta\in\mathbb{R}$ a ecuaţiei

$$e(\theta)=\frac{z}{|z|}, \tag{4.1}$$

se numeşte *argument al numărului* complex z, iar funcţia e definită anterior se numeşte *funcţia generatoare* a argumentelor numărului complex. Vom nota în cele ce urmează cu Argz mulţimea argumentelor lui $z\in\mathbb{C}^*$.

Observaţia 4.2. Numărul complex $z=0$ nu are nici un argument (sau are argumentul nedeterminat) şi datorită periodicităţii mulţimea Argz este infinită dacă $z\in\mathbb{C}^*$

Observaţia 4.3. Argumentul unui număr complex $z\neq 0$ se poate interpreta ca o aplicaţie multivocă a lui $\mathbb{C}^*$ în mulţimea părţilor lui $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, adică

$$\mathrm{Arg} : \mathbb{C}^* \to \mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Mulţimea valorilor sale este $\mathrm{Arg}(\mathbb{C}^*)\subset\mathcal{P}(\mathbb{R})$ iar fiecare element al mulţimii $\mathrm{Arg}(\mathbb{C}^*)$ este mulţimea $\{\theta+2k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$ unde $\theta\in]-\pi,\pi]$.

Definiţia 4.3. Dacă $z\in\mathbb{C}^*$, funcţia

$$\arg : \mathbb{C}^* \to]-\pi,\pi],$$

cu $argz=\theta\in]-\pi,\pi]$, θ soluţia unică a ecuaţiei (4.1) se numeşte *argument principal* a lui z.

Observaţia 4.4. Acum aplicaţia multivocă $\mathrm{Arg}:\mathbb{C}^* \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ se va exprima în punctul $z\in\mathbb{C}^*$ astfel

$$\mathrm{Arg}z = \{ \arg z + 2k\pi \ ; \ k\in\mathbb{Z} \}.$$

Propoziţia 4.1. Au loc relaţiile:

$$Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg\,z_1 + Arg\,z_2, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*, \tag{4.2}$$

$$Arg(z_1/z_2) = Arg\,z_1 - Arg\,z_2, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*, \tag{4.3}$$

$$arg\,z = 0 \Leftrightarrow Re\,z > 0 \text{ și } Im\,z = 0 \tag{4.4}$$

$$arg\,z = \pi \Leftrightarrow Re\,z < 0 \text{ și } Im\,z = 0 \tag{4.5}$$

Observația 4.5. Din relația (4.1) se deduce că orice $z \in \mathbb{C}^*$ se reprezintă sub forma:

$$z = |z|\,e(\theta) = |z|(\cos\theta + \sin\theta) \tag{4.6}$$

unde $\theta \in Arg\ z$, numită reprezentarea trigonometrică.

Acum, utilizând reprezentarea (4.6) se pot deduce reprezentările trigonometrice pentru $z_1 \cdot z_2, z^n$ unde $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}^*$ iar $n \in \mathbb{Z}$ și deasemenea cunoscuta formulă a lui Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \quad n \in \mathbb{Z}\,. \tag{4.7}$$

BIBLIOGRAFIE

1. HAMBURG, P., MOCANU, P., NEGOESCU, P., " Analiza matematică " (Funcții complexe), Editura Didactică și Pedagogică, 1982.

2. Matematică (Geometrie și trigonometrie), Manual pentru clasa a IX-a, 1987.

ON THE ARGUMENT OF A COMPLEX NUMBER

ABSTRACT. The author presents another point of view about the argument of a complex number.

Universitatea din Baia Mare
Str. Victoriei nr.76, 4800 Baia Mare
ROMÂNIA