Lucrările Seminarului de
CREATIVITATE MATEMATICĂ
Vol.4(1994-1995),105-112

CONSIDERAŢII ASUPRA UNOR ŞIRURI

Gheorghe BOROICA

În prezenta lucrare ne ocupăm de proprietăţile unor şiruri definite printr-o relaţie de recurenţă liniară de ordinul doi. Aceste proprietăţi vor fi stabilite fără a folosi termenul general al şirului care, de altfel, se poate determina. Totodată sunt expuse şi alte categorii de şiruri care indeplinesc proprietăţi similare.

Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_{n+1}=a\cdot x_n+b^2\cdot x_{n-1}$, $(\forall)n\geq 1$, $n\in\mathbb{N}$ cu $x_0, x_1\in\mathbf{Z}$ date şi $a,b,\in\mathbf{Z}^*$. Se observă că $x_n\in\mathbf{Z}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}$.
Metoda folosită pentru studiul proprietăţilor acestui şir va fi metoda matriceală. Relaţia de definiţie a şirului poate fi scrisă:

$$\begin{pmatrix} bx_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b\,x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \quad (\forall)\ n\in\mathbb{N}^* \tag{1}$$

Notăm $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbf{Z})$. Se observă că matricea A este simetrică.

Se ştie că produsul B·C a două matrice simetrice care comută (B·C=C·B) este de asemenea o matrice simetrică. Cum A^mşi A^n, $m,n\in\mathbb{N}$, comută şi A este simetrică, urmează că matricele A^p, $p\in\mathbb{N}$ sunt simetrice.

Deci A^n este de forma $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & c_n \end{pmatrix}$ $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ (2)

Relaţia (1) se poate scrie $\begin{pmatrix} b\cdot x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A\cdot \begin{pmatrix} b\cdot x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$ $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*$ (3)

Înlocuind în relaţia (3) pe n, în mod succesiv, prin n-1, n-2, ..., 2, 1 obţinem:

$$\begin{pmatrix} b\cdot x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = A^{n}\cdot \begin{pmatrix} b\cdot x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (\forall)\ n\in\mathbb{N}^* \tag{4}$$

Înlocuind pe n în relaţia (4) cu n+k, k∈ℕ rezultă

$$\begin{pmatrix} b\cdot x_{n+k} \\ x_{n+k+1} \end{pmatrix} = A^{n+k}\cdot \begin{pmatrix} b\cdot x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b\cdot x_{n+k} \\ x_{n+k+1} \end{pmatrix} = A^{n}\cdot A^{k}\cdot \begin{pmatrix} b\cdot x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} b\cdot x_{n+k} \\ x_{n+k+1} \end{pmatrix} = A^{n}\cdot \begin{pmatrix} b\cdot x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} \quad (\forall)\ n\in\mathbb{N}^*,\ (\forall)\ k\in\mathbb{N} \tag{5}$$

Din relaţiile (5) şi (2)

rezultă: $\begin{cases} b\cdot x_{n+k} = b\cdot x_k\cdot a_n + x_{k+1}\cdot b_n \\ x_{n+k+1} = b\cdot x_k\cdot b_n + c_n\cdot x_{k+1} \end{cases}$ $(\forall)\ n\in\mathbb{N}^*,\ (\forall)\ k\in\mathbb{N}$ (6)

Pentru k=0 şi k=1 în relaţiile (6) obţinem:

$$\begin{cases} b\cdot x_0\cdot a_n + x_1\cdot b_n = b\cdot x_n \\ b\cdot x_1\cdot a_n + x_2\cdot b_n = b\cdot x_{n+1} \\ b\cdot x_0\cdot b_n + x_1\cdot c_n = x_{n+1} \\ b\cdot x_1\cdot b_n + x_2\cdot c_n = x_{n+2} \end{cases} \quad (\forall)\ n\in\mathbb{N}^* \ \textit{unde}\ x_2 = a\cdot x_1 + b^2\cdot x_0 \tag{7}$$

Dorim ca din acest sistem să determinăm numerele întregi a_n, b_n şi c_n.

Dacă $x_0 \cdot x_2 - x_1^2 \neq 0$ atunci sistemul(7)este compatibil determinat şi avem:

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{x_2 \cdot x_n - x_1 x_{n+1}}{d} & \dfrac{b(x_0 \cdot x_{n+1} - x_1 x_n)}{d} \\ \dfrac{b(x_0 x_{n+1} - x_1 x_n)}{d} & \dfrac{(a \cdot x_0 - x_1) x_{n+1} + b^2 \cdot x_0 x_n}{d} \end{pmatrix} \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}^* \text{ unde } d = x_0 x_2 - x_1^2 \qquad (8)$$

Avem:

$$\left.\begin{aligned} \det(A^n) &= \frac{1}{d}(b^2 x_n^2 - x_{n+1}^2 + a \cdot x_n \cdot x_{n+1}) \\ \det(A^n) &= (\det A)^n = (-b^2)^n = (-1)^n \cdot b^{2n} \end{aligned}\right| \Rightarrow x_n(a \cdot x_{n+1} + b^2 \cdot x_n) - x_{n-1}^2 =$$

$$= (-1)^n \cdot d \cdot b^{2n} \Leftrightarrow x_n \cdot x_{n-2} - x_{n+1}^2 = (-1)^n \cdot d \cdot b^{2n} \quad (\forall)\, n \in \mathbb{N}$$

Avem deci proprietatea:

(P1,) $x_n \cdot x_{n+2} - x_{n+1}^2 = (-1)^n \cdot d \cdot b^{2n}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ *unde* $d = x_0 x_2 - x_1^2 \neq 0$

Obsevaţia 1. Dacă $a = b = 1$; $x_0 = F_0 = 0$ *si* $x_1 = F_1 = 1$ atunci şirul considerat se numeşte şirul numerelor lui Fibonacci, iar proprietatea anterioară se scrie $F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$, proprietate care se găseşte în [1].

Din relaţiile (5) şi (8) rezultă:

(P2) $d \cdot x_{n+k} = x_n(x_2 \cdot x_k - x_1 x_{k+1}) - x_{n+1}(x_1 x_k - x_0 x_{k+1})$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}^*$ *si* $(\forall)\, k \in \mathbb{N}$

unde $d = x_0 \cdot x_2 - x_1^2$

Observaţia 2.Considerând şirul numerelor lui Fibonacci, proprietatea anterioară devine:

$$F_{n+k}=F_{n-1}\cdot F_k+F_n\cdot F_{k+1}, \quad (\forall)\, n\in\mathbb{N}^*\ si\ (\forall)\, k\in\mathbb{N}$$

Din relațiile (5) și (8), inlocuind pe n cu $n\cdot r, r\in\mathbb{N}^*$ și pe k prin n rezultă:

$$d\cdot x_{n(r+1)}=x_2\cdot x_{nr}\cdot x_n-x_1\cdot x_{nr+1}x_n+x_3\cdot x_{nr+1}x_{n+1}-x_1 x_{nr}x_{n+1}$$

Considerăm acum $x_0=0$ și atunci ultima relație ne arată că dacă x_n divine x_{nr}, atunci x_n divide $d\cdot x_{n(r+1)}\Leftrightarrow x_n$ divide $(-x_1^2)\cdot x_{n(r+1)}$.
Luăm $x_1^2=1\Leftrightarrow x_1\in\{-1,1\}$ și deducem că x_n divide $x_{n(r+1)}$.
Cum x_n divide $x_{n\cdot 1}$ rezultă conform inducției matematice că are loc proprietatea:

(P3)x_n divide pe x_{nr}, unde $r\in\mathbb{N}^*$, $x_0=0$, $x_1\in\{-1,1\}$

Observația 3.Șirul numerelor lui Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ verifică condițiile din proprietatea P3, deci F_n divide pe F_{nr}, unde $r\in\mathbb{N}^*$.

(P4) **Dacă $(m,n)=d$, atunci $(x_m,x_n)=x_d$ unde $x_0=0;x_1\in\{-1,1\}$**

Se notează (m,n) cel mai mare divizor comun al numerelor întregi m și n.

Demonstrație:

Fie $d=(m,n)\Rightarrow d/m$ *si* $d/n \overset{P3}{\Longrightarrow} x_d/x_m$ *si* x_d/x_n. .Deci x_d este divizor comun a numerelor x_m și x_n.Rămâne să arătăm că x_d este cel mai mare divizor al lui x_m și x_n.Fie r și s astfel încât $d=m\cdot r+n\cdot s$.
Folosind proprietatea P2. cu $x_0=0$, $x_1\in\{-1,1\}$ și luând $n=m\cdot r, k=n\cdot s$ obținem: $-x_{mr+ns}=-x_d=x_2 x_{mr}\cdot x_{ns}-x_1 x_{mr}x_{ns+1}-x_1 x_{mr+1}\cdot x_{ns}$.
De aici, folosind faptul că orice divizor d_1 al lui x_m și x_n divide pe x_{mr} și x_{nr}, va rezulta că d_1 divide pe x_d. De aceea x_d este cel mai mare divizor comun a numerelor x_m și x_n.

Observația 4.Șirul numerelor lui Fibonacci satisface proprietatea precedentă, adică

$$(F_n,F_m)=F_d,\ unde\ d=(m,n)\ iar\ m,n\in\mathbb{N}$$

Observasția 5.Proprietățile anterioare sunt satisfăcute de o clasă de șiruri din mulțimea șirurilor considerate; mai precis şirurile$(x_n)_{n\geq 0}$ date de

$x_{n+1}=a\cdot x_n+b^2\cdot x_{n-1}$, $(\forall) n\in\mathbb{N}^*$, $cu\ x_0=0,\ x_1\in\{-1,1\}$ ş i $(a,b)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*$ arbitrare.

Rămâne ca problemă deschisă găsirea tuturor şirurilor,din mulţimea şirurilor considerate, care verifică proprietăţile P3 şi P4 dar cu alte condiţii iniţiale decât cele precizate.

Remarcăm că aceste proprietăţi au fost stabilite fără utilizarea termenului general al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$.

Considerând şirul numerelor lui Lucas, $L_{n+1}=L_{n-1}+L_n$ $(\forall) n>=1$ cu $L_0=2$ *si* $L_1=1$ proprietatea P1 devine:

$$L_{n+1}\cdot L_{n-1}-L_n^2=5\cdot(-1)^{n-1},\ (\forall) n\in\mathbb{N}^*$$

Deşi acesta este un şir de tipul (1), totuşi el nu verifică proprietăţile P3 şi P4.Termenii acestui şir satisface alte proprietăţi interesante.

Deci p este un număr prim, atunci $L_p\equiv 1$(model p).

Reciproca acestei afirmaţii nu este în general adevărată. Numerele n care sunt compuse şi pentru care $L_n\equiv 1$(mod n) sunt denumite pseudo-prime Fibonacci.Se poate demonstra că numărul n=705=3·5·47 este un număr pseudo-prim Fibonacci.

Observaţia 6.Există o mare diversitate de şiruri care indeplinesc proprietatea P3 sau P4.Dăm în continuare câteva exemple de astfel de şiruri.

(1)Dacă $(a_n)_{n\geq 0}$ este un şir constant de numere intregi,atunci

$(a_m,a_n)=a_{(m,n)}$ $(\forall) m,n\in\mathbb{N}$ şi (m,n) este cel mai mare divizor comun a numerelor m şi n.

(2)Dacă $a,b\in\mathbb{Z},(a,b)=1$ atunci şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$y_n=a^n-b^n$, $(\forall) n\in\mathbb{N}^*$ satisface proprietatea

$(y_n,y_m)=y_{(n,m)}$ $(\forall) m,n\in\mathbb{N}^*$

Luând în exemplul precedent a=2,b=1 obţinem şirul $(M_n)_{n\geq 1}$,$M_n=2^n-1$ $(\forall) n\in\mathbb{N}^*$. Şirul acestor numere se numesc şirul numerelor lui Mersenne.

El satisface proprietatea:

$(M_n, M_m) = M_{(n,m)}$ $(\forall) n, m \in \mathbb{N}^*$

(3)Fie şirul de numere intregi $(x_n)_{n>0}$ definit prin:

$$x_n = \begin{cases} 1, n & impar \\ a, n & par \end{cases} \quad unde\ a \in \mathbb{Z}\ arbitrar$$

Atunci avem $(x_n, x_m) = x_{(n,m)}$ $(\forall) n, m \in \mathbb{Z}$

(4)Există şi alte inele (diferite de inelul numerelor intregi) în care au loc proprietăţi asemănătoare. De exemplu,în inelul Z[X] şirul de polinoame $(f_n)_{n\geq 1}$ definit prin $f_n = X^n - 1$ satisface proprietatea $(f_n, f_m) = f_{(n,m)}$ $(\forall) n, m \in \mathbb{N}^*$

Demonstraţie.

Fie $(n,m) = d \rightarrow n = d \cdot n_1$, $m = d \cdot m_1$ cu $n_1, m_1 \in \mathbb{Z}$ si $(n_1, m_1) = 1$

Arătăm că rădăcinile polinoamelor f_d şi (f_n, f_m) coincid.

Fie x_0 rădăcina pentru $f_d \rightarrow x_0^d = 1 \Rightarrow (x_0^d)^{m_1} = 1$ si $(x_0^d)^{n_1} = 1 \rightarrow x_0$ este rădăcină pentru f_n si $f_m \rightarrow x_0$ rădăcina şi pentru (f_n, f_m).

Fie α rădăcină pentru $(f_n, f_m) \rightarrow \alpha$ rădăcină pentru f_n si f_m.

Avem deci $\alpha^n = 1$ si $\alpha^m = 1$. Cum $d = (n,m) \rightarrow (\exists)\, u, v \in \mathbb{Z}$ astfel încât $d = u \cdot m + v \cdot u$. .Rezultă $\alpha^d = \alpha^{u \cdot m + v \cdot n} = (\alpha^m)^u \cdot (\alpha^n)^v = 1$ şi deci α este rădăcină şi pentru f_d.

Egalitatea din enunţ trebuie privită, abstracţie făcând de o asociere prin divizibilitate.

În [2] este dată o altă demonstraţie folosind aşa zisele polinoame ciclotomice.

(5)În inelul Z[X] şirul de polinoame $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n = X^n - a^n$ are proprietatea

$f_n | f_{nr}$, unde $r \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{Z}^*$

Soluţie:

Arătăm că $f_n \vdots f_p \Leftrightarrow n \vdots p$ unde $n, p \in \mathbb{N}^*$

Presupunem $f_n \vdots f_p \Rightarrow n \geq p$. .Fie $n = p \cdot q + r$, $q, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r < p$

Avem $f_n = X^n - a^n = X^{pq} \cdot X^r - a^{pq} \cdot a^r = X^r(X^{pq} - a^{pq}) + a^{pq}(X^r - a^r) =$

$= X^r \cdot (X^p - a^p) \cdot q(X) + a^{n-r}(X^r - a^r)$

Deci $f_n = h(X) \cdot f_p + a^{n-r} \cdot f_r$ cu $h \in \mathbf{Z}[X]$, $h \neq 0$

Atunci $f_n \vdots f_p \Leftrightarrow a^{n-r} \cdot f_r = 0 \Leftrightarrow f_r = 0 \Leftrightarrow X^r - a^r = 0 \Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow n = pq$

Observaţia 7. Metoda utilizată pentru stabilirea proprietăţilor similarede tip (1) poate fi utilizată şi pentru anumite recurenţe liniare de ordin superior.

BIBLIOGRAFIE

1.ISAAC,J.SCHOENBERG, Privelişti matematice,Ed.Tehnică, Bucureşti,1989

2.MARCEL,ŢENA, Cinci teme de aritmetică superioară, Biblioteca Societăţii de Ştiinţe Matematice din România

CONSIDERATIONS ABOUT SOME SEQUENCES

Abstract. The paper is devoted to the study of the properties of certain sequences defined by a reccurence relation of rank 2.

Colegiul " Gheorghe Şincai "
4800 Baia Mare
ROMÂNIA